$(SBD)\cap(SAC)=SI$

b) Có $N\in(SBD)\cap(MNP)$ (3)

Trong mp(SAC) gọi

$J=MP\cap SI\Rightarrow\begin{cases}J\in MP\subset(MNP)\\J\in SI\subset(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow J\in(MNP)\cap(SBD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(SBD)\cap(MNP)=NJ$.

c) Trong mp(SBD) gọi $Q=SD\cap NJ\Rightarrow\begin{cases}Q\in SD\\Q\in NJ\subset(MNP)\end{cases}\Rightarrow Q=SD\cap(MNP)$.

d) Có $SE=(SAB)\cap(SCD)$

Theo giả thuyết có $H=MN\cap PQ\Rightarrow\begin{cases}H\in MN\subset(SAB)\\H\in PQ\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow H\in(SAB)\cap(SCD)$.

Hay $H\in SE\Rightarrow$ 3 điểm S, H, E thẳng hàng.

e) Có $SK=(SAD)\cap(SBC)$

Theo giả thuyết có $R=MQ\cap NP\Rightarrow\begin{cases}R\in MQ\subset(SAD)\\R\in NP\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow R\in(SAD)\cap(SBC)$. Hay $R\in SK\Rightarrow$ ba đường thẳng SK, MQ, NP đồng quy tại điểm R.

Câu 8: Cho tứ diện S.ABC với I trung điểm của SA, J là trung điểm của BC. Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC.

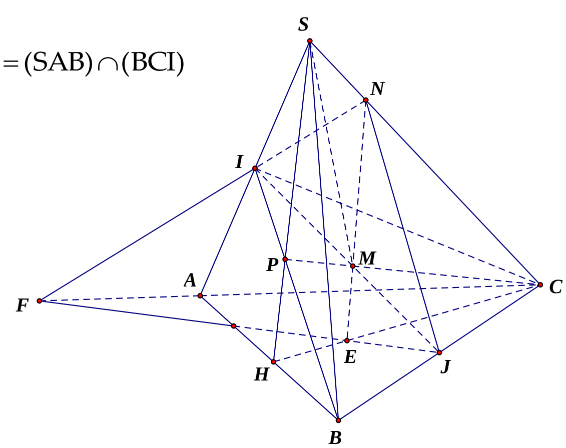
a) Xác định giao điểm P của MC và (SAB).

b) Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC).

c) Tìm giao điểm E của MN và (ABC).

d) Gọi $F=IN\cap AC$. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

LỜI GIẢI



a) Chọn mp(BCI) chứa MC. Có $IB=(SAB)\cap(BCI)$

Trong mp(BCI) gọi

$P=CM\cap BI\Rightarrow\begin{cases}P\in CM\\P\in BI\subset(SAB)\end{cases}$

$\Rightarrow P=CM\cap(SAB)$.

b) Có $\begin{cases}C\in(ABC)\\C\in PM\subset(SMP)\end{cases}$

$\Rightarrow C\in(ABC)\cap(SMP)$ (1)

Trong mp(SAB) gọi $H=SP\cap AB\Rightarrow\begin{cases}H\in SP\subset(SMP)\\H\in AB\subset(ABC)\end{cases}$

$\Rightarrow H \in (ABC) \cap (SMP)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(ABC) \cap (SMP) = CH$.

c) Trong mp(SHC) gọi $E = MN \cap CH \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E = MN \cap (ABC)$.

d) Có $F = IN \cap AC \Rightarrow \begin{cases} F \in IN \subset (IJN) \\ F \in AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJN) \cap (ABC)$ (3).

Có $E = MN \cap CH \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IJN) \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJN) \cap (ABC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(IJN) \cap (ABC) = EF$

Ngoài ra có $J \in (IJN) \cap (ABC)$. Hay $J \in EF$

Kết luận đường thẳng EF luôn đi qua điểm J cố định khi M, N thay đổi.

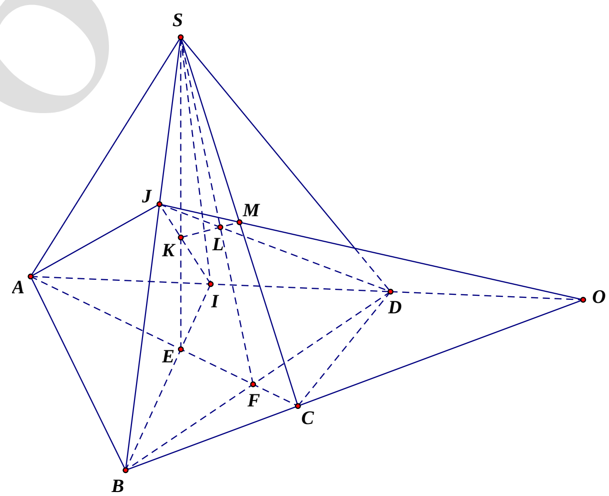
Câu 9: Cho tứ giác ABCD có các cạnh đối đôi một không song song, $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm $I \in$ cạnh AD, lấy điểm $J \in$ cạnh SB.

a) Tìm $K = IJ \cap (SAC)$

b) Tìm $L = DJ \cap (SAC)$

c) Gọi $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: K, L, M thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a) Có $S \in (SAC) \cap (SBI)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $E = AC \cap BI$, có

$\begin{cases} E \in AC \subset (SAC) \\ E \in BI \subset (SBI) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SAC) \cap (SBI)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBI) = SE$

Trong mp(SBI) gọi $K = IJ \cap SE$, có

$\begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$

b) Có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Trong mp(ABCD) gọi $F = AC \cap BD$, có $\begin{cases} F \in AC \subset (SAC) \\ F \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SF$

Trong mp(SBD) gọi $L = DJ \cap SF$, có $\begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

c) Có $K = IJ \cap SE$ và $\begin{cases} K \in IJ \subset (AJO) \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in (AJO) \cap (SAC)$ (3).

Có $L = DJ \cap SF$ và $\begin{cases} L \in DJ \subset (AJO) \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in (AJO) \cap (SAC)$ (4).

Có $M = OJ \cap SC$ và $\begin{cases} M \in OJ \subset (AJO) \\ M \in SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (AJO) \cap (SAC)$ (5).

Từ (3), (4) và (5) suy ra ba điểm K, L, M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (AJO) và (SAC), nên suy ra ba điểm K, L, M thẳng hàng.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

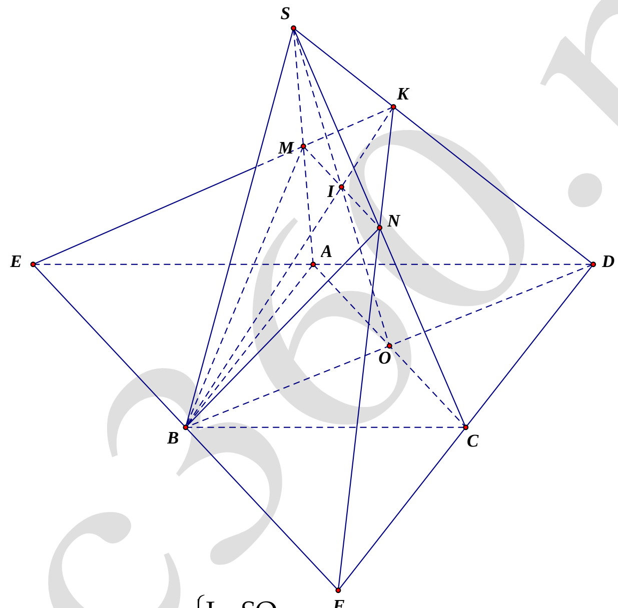
a). Tìm giao tuyến của (BMN) với các mp $(SAB),(SBC)$

b). Tìm $I = SO \cap (BMN), K = SD \cap (BMN)$

c). Tìm $E = AD(BMN), F = CD \cap (BMN)$

d). Chứng minh rằng: B, E, F thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a) Trong mp(SAC) gọi $I = SO \cap MN$, có $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (BMN)$.

Trong mp(SBD) gọi $K = SD \cap BI$, có $\begin{cases} K \in SD \\ K \in BI \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap (BMN)$.

b) Trong mp(SAD) gọi $E = AD \cap KM$, có

$\begin{cases} E \in AD \\ E \in KM \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow E = AD \cap (BMN)$.

Trong mp(SCD) gọi $F = CD \cap KN$, có $\begin{cases} F \in CD \\ F \in KN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow F = CD \cap (BMN)$.

c) Có $E = AD \cap KM \Rightarrow \begin{cases} E \in AD \subset (ABCD) \\ E \in KM \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (ABCD) \cap (BMN)$ (1).

Có $F = CD \cap KN \Rightarrow \begin{cases} F \in CD \subset (ABCD) \\ F \in KN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABCD) \cap (BMN)$ (2).

Có $B \in (ABCD) \cap (BMN)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba điểm E, B, F thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD) và (BMN), nên suy ra ba điểm E, B, F thẳng hàng.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD.

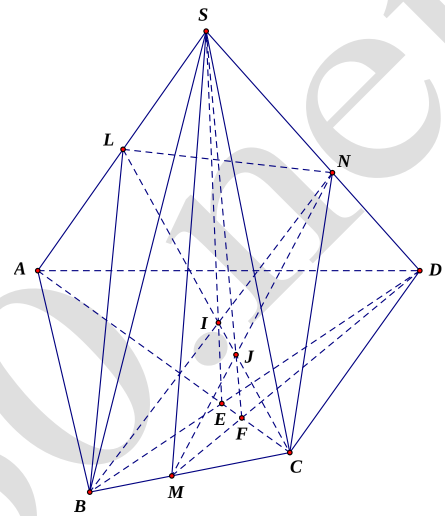
a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC)

b) Tìm giao điểm J của MN và (SAC)

c) Chứng minh: I, J, C thẳng hàng.

d) Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

LỜI GIẢI



a) Có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $E = AC \cap BD$, có

$\begin{cases} E \in AC \subset (SAC) \\ E \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SE$.

Trong mp(SBD) gọi $I = BN \cap SE$, có

$\begin{cases} I \in BN \\ I \in SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I = BN \cap (SAC)$.

b) Có $S \in (SAC) \cap (SMD)$ (3).

Trong mp(ABCD) gọi $F = AC \cap MD$, có

$\begin{cases} F \in AC \subset (SAC) \\ F \in MD \subset (SMD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAC) \cap (SMD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(SAC) \cap (SMD) = SF$.

Trong mp(SMD) gọi $J = MN \cap SF$, có $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SAC)$.

c) Có $C \in (SAC) \cap (BCN)$ $(*)$.

Có $I = BN \cap SE \Rightarrow \begin{cases} I \in SE \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (BCN) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (BCN)$ $(**)$.

Có $J = MN \cap SF \Rightarrow \begin{cases} J \in SF \subset (SAC) \\ J \in MN \subset (BCN) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (BCN)$ $(***)$.

Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$ suy ra 3 điểm C, I, J thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (BCN). Nên 3 điểm C, I, J thẳng hàng.

d) Trong mp(SAC) gọi $L = CI \cap SA$.

Có $BL = (BCN) \cap (SAB)$; $LN = (BCN) \cap (SAD)$; $NC = (BCN) \cap (SCD)$.

Do đó thiết diện cần tìm là tứ giác BCNL.

Câu 12: Cho tứ diện ABCD có K là trung điểm của AB . Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC, JB = 3JD$.

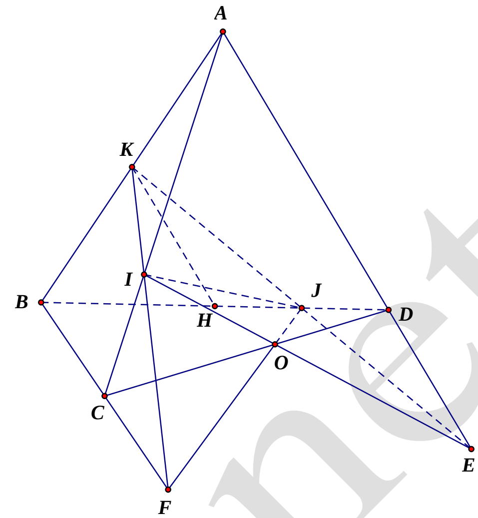
1) Tìm giao điểm E của AD và (IJK) .

2) Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .

3) Gọi O là giao điểm của d với CD. Chứng minh I, O, E thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}, \frac{OC}{OD}$.

LỜI GIẢI



a) Trong mp(ABD) gọi $E = KJ \cap AD$, có

$\begin{cases} E \in AD \\ E \in KJ \subset (KIJ) \end{cases} \Rightarrow E = AD \cap (KIJ)$.

b) Trong mp(ABC) gọi $F = KI \cap BC$, có

$\begin{cases} F \in KI \subset (KIJ) \\ F \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (KIJ) \cap (BCD)$ (1)

Và có

$\begin{cases} J \in (KIJ) \\ J \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (KIJ) \cap (BCD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(KIJ) \cap (BCD) = FJ$

c) Có $(KIJ) \cap (ACD) = IE$. Theo đề bài có

$O = CD \cap FJ$, $\begin{cases} O \in FJ \subset (KIJ) \\ O \in CD \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (KIJ) \cap (ACD)$ có nghĩa $O \in IE$. Kết luận 3 điểm I, O ,E thẳng hàng.

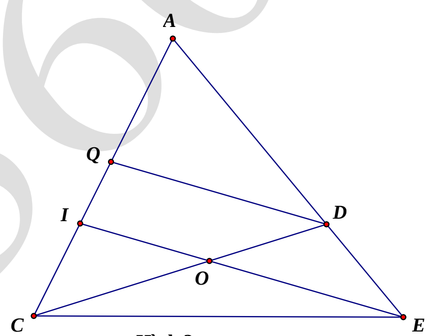
d) Gọi H trung điểm của BD, suy ra J trung điểm của HD và $KH \parallel AD$. Ta có $\Delta JHK = \Delta JDE (g.c.g) \Rightarrow JK = JE$ và $HK = DE \Rightarrow AD = 2DE$.

Tam giác ADE được vẽ lại ở hình 2.

Dựng $DQ \parallel EI, Q \in AC$. Có

$\frac{AQ}{QI} = \frac{QD}{IE} = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow QI = \frac{1}{3} AI, IE = \frac{3}{2} QD$ (3)



Hình 2

Và có $\frac{CI}{CQ} = \frac{CI}{CI + IQ} = \frac{\frac{1}{2} IA}{\frac{1}{2} IA + \frac{1}{3} IA} = \frac{3}{5}$.

Trong ΔCDQ, có $OI \parallel DQ \Rightarrow \frac{CO}{CD} = \frac{OI}{QD} = \frac{CI}{CQ} = \frac{3}{5} \Rightarrow OI = \frac{3}{5} QD$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{OI}{IE} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{2}{3}$; $\frac{CO}{CD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{3}{2}$.

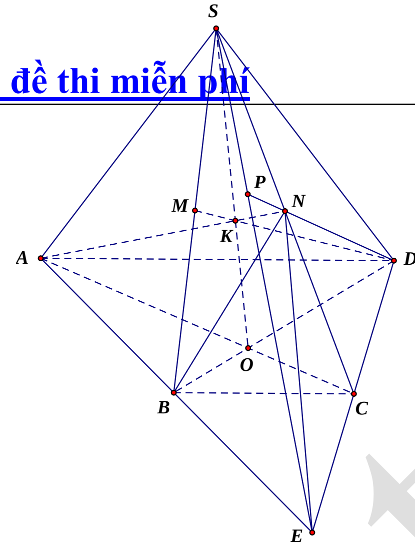
Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ,AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC, $O = AC \cap BD$.

a) Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD).

b) Tìm giao điểm P của DN và (SAB).

c) Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh 3 điểm S, K, O thẳng hàng. Tính $\frac{KS}{KO}$.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} N \in (ABN) \\ N \in SC \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow N \in (ABN) \cap (SCD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $E = AB \cap CD$,

$\begin{cases} E \in AB \subset (ABN) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (ABN) \cap (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) có $(ABN) \cap (SCD) = NE$.

b) Có SE là giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD). Suy ra điểm P cần tìm là giao điểm của DN và SE.

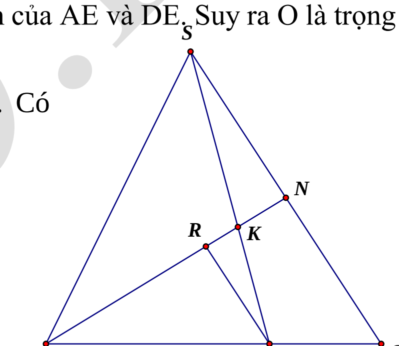
c) Có SO là giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD). Có $K = AN \cap DM$ $\begin{cases} K \in AN \subset (SAC) \\ K \in DM \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$ hay K thuộc SO. Kết luận 3 điểm S, K, O thẳng hàng.

Trong ΔADE có $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ B, C lần lượt trung điểm của AE và DE. Suy ra O là trọng tâm tam giác ADE.

Tam giác SAC được vẽ lại ở hình 2. Dựng $OR \parallel SC, R \in AN$. Có $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{OR}{CN} = \dfrac{2}{3}$; có $\Delta KSN \sim \Delta KOR\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{KS}{KO} = \dfrac{SN}{OR} = \dfrac{NC}{\frac{2}{3}NC} = \dfrac{3}{2}$

Vậy $\dfrac{KS}{KO} = \dfrac{3}{2}$.



Hình 2

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG II

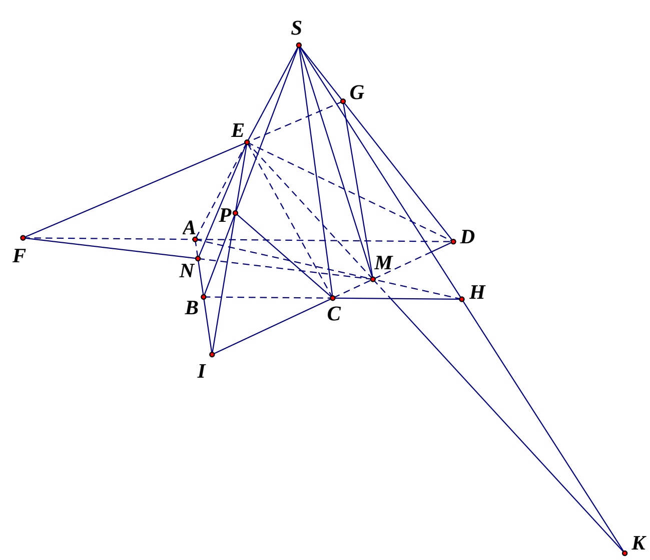
Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang có $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC; E$ là trung điểm của SA. N là điểm thuộc đoạn AB sao cho $NB = 2NA$ và M là điểm thuộc đoạn CD sao cho $MD = 2MC$.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (EMN) và (SAD) ; (EMN) và (SCD).

b) Tìm giao điểm của EM với (SBC).

c) Tìm giao tuyến của (CDE) và (SAB). Giao tuyến này cắt SB tại P và cắt AB tại I. Chứng minh: $SB = \dfrac{2}{3}SP$ và diện tích tam giác IDE bằng 3 lần diện tích tam giác ICP.

LỜI GIẢI



a) Có $E \in (EMN) \cap (SAD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $F = MN \cap AD$

$\Rightarrow \begin{cases} F \in MN \subset (EMN) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (EMN) \cap (SAD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(EMN) \cap (SAD) = FE$.

Có $M \in (EMN) \cap (SCD)$ (3).

Trong mp(SAD) gọi $G = FE \cap SD \Rightarrow \begin{cases} G \in FE \subset (EMN) \\ G \in SD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (EMN) \cap (SCD)$ (3).

Từ (3) và (4) suy ra $(EMN) \cap (SCD) = MG$.

b) Chọn mp(SAM) chứa EM.

Có $S \in (SAM) \cap (SBC)$ (5).

Trong mp(ABCD) gọi $H = AM \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AM \subset (SAM) \\ H \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SAM) \cap (SBC)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(SAM) \cap (SBC) = SH$.

Trong mp(SAM) gọi $K = EM \cap SH \Rightarrow \begin{cases} K \in EM \\ K \in SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K = EM \cap (SBC)$.

c) Có $E \in (ECD) \cap (SAB)$ (7).

Trong mp(ABCD) gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (ECD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (ECD) \cap (SAB)$ (8).

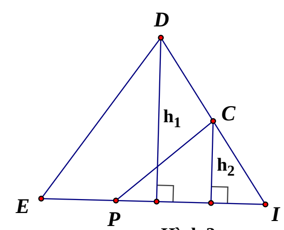
Từ (7) và (8) suy ra $(ECD) \cap (SAB) = EI$.

Trong ΔADI có $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow BC$ là đường trung bình của tam giác này.

Trong ΔSAI có P là giao điểm của hai đường trung tuyến SB và IE. Suy ra P là trọng tâm của ΔSAI. Theo tính chất trọng tâm $SP = \frac{2}{3}SB$.

Tam giác DEI được vẽ lại ở hình 2.

Có $\frac{S_{\Delta IDE}}{S_{\Delta ICP}} = \frac{\frac{1}{2}h_1 EI}{\frac{1}{2}h_2 PI} = \frac{2h_2 \cdot \frac{3}{2}PI}{h_2 PI} = 3 \Rightarrow S_{\Delta IDE} = 3S_{\Delta ICP}$ (đpcm).



Hình 2

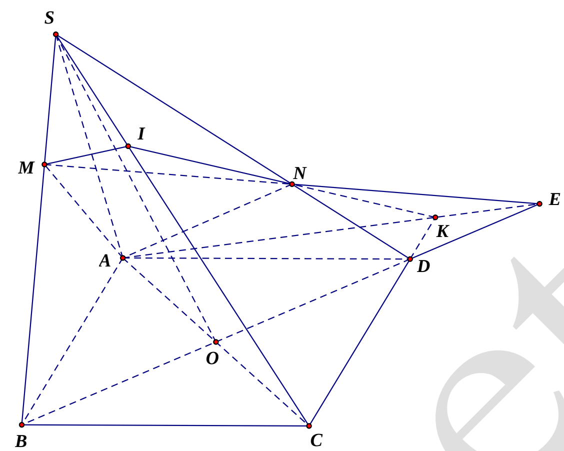
Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN). Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp S.ABCD.

c) Gọi K là giao điểm của IN và CD. Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

LỜI GIẢI



a) Có $A \in (AMN) \cap (ABCD)$ (1).

Trong mp(SBD) gọi $E = MN \cap BD$, có

$\begin{cases} E \in MN \subset (AMN) \\ E \in BD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (AMN) \cap (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (ABCD) = AE$.

Có $A \in (AMN) \cap (SCD)$ (3)

Trong mp(ABCD) gọi $K = AE \cap CD$, có

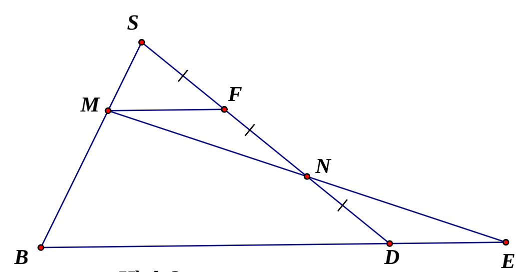
$\begin{cases} K \in AE \subset (AMN) \\ K \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (AMN) \cap (SCD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(AMN) \cap (SCD) = KN$.

Trong mp(SCD) gọi $I = KN \cap SC$, có $\begin{cases} I \in SC \\ I \in KN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow I = SC \cap (AMN)$.

Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác AMIN.

b) Tam giác SBD được vẽ lại ở hình 2. Dựng $MF \parallel BD, F \in SD$



Hình 2

Theo định lý Ta lét ta có

$\frac{SF}{SD} = \frac{MF}{BD} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow NF = ND$

và $MF = \frac{1}{3}BD$ (5).

Có $\Delta NDE = \Delta NFM(g.c.g) \Rightarrow ED = MF$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{ED}{EB} = \frac{1}{4}$

Trong ΔEAB có $DK \parallel AB \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{KD}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{KD}{CD} = \frac{1}{4}$. Kết luận $\frac{KC}{KD} = 5$.

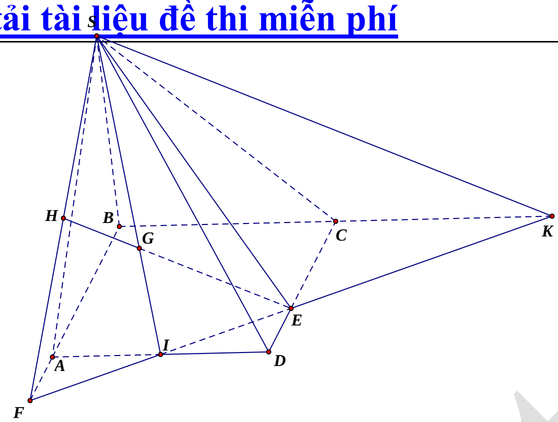
Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, I là trung điểm của AD và E là điểm thuộc cạnh CD sao cho $DC = 3DE$.

a) Tìm giao điểm K của EI với mặt phẳng (SBC)

b) Chứng minh rằng: $GE \parallel (SBC)$

LỜI GIẢI

a) Trong mp(ABCD) gọi



$K = IE \cap BC$, có

$\begin{cases} K \in IE \\ K \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K = IE \cap (SBC)$.

b) Có $\Delta ECK \sim \Delta EDI\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{EK}{EI} = \dfrac{EC}{ED} = 2 \Rightarrow EK = 2EI$.

Trong ΔSIK có $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{IE}{IK} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow GE \parallel SK$ (Định lý đảo Ta lét), ngoài ra $SK \subset (SBC) \Rightarrow GE \parallel (SBC)$.

c) Có $S \in (SAB) \cap (SEI)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $E = AB \cap EI$, có $\begin{cases} F \in AB \subset (SAB) \\ F \in EI \subset (SEI) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAB) \cap (SEI)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAB) \cap (SEI) = SF$.

Trong mp(SEI) gọi $H = GE \cap SF$, có $\begin{cases} H \in GE \\ H \in SF \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow H = GE \cap (SAB)$.