HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

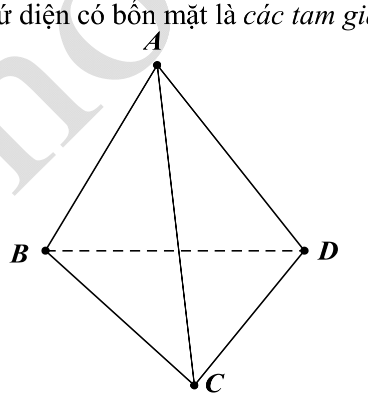
1. Khái niệm:

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng (α). Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ...,$ SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3 ,..., SA_nA_1 được gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Ta gọi S là *đỉnh của hình chóp*, còn đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ là *mặt đáy của hình chóp*, các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 được gọi là *các mặt bên của hình chóp*, các đoạn thẳng SA_1, SA_2, SA_3,..., SA_n được gọi là *các cạnh bên của hình chóp* .

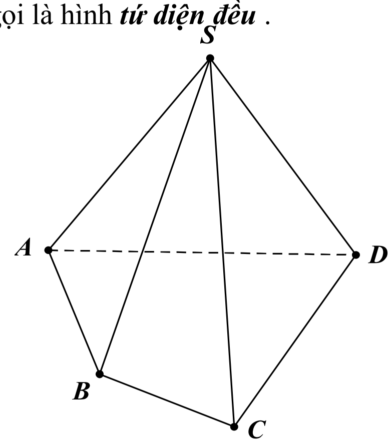
Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là *hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác , ...*

Cho bốn điểm A , B , C , D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn gọi là *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD. Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh của tứ diện*. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh của tứ diện* . Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là *hai cạnh đối diện của tứ diện*. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là *các mặt của tứ diện* . Đỉnh không nằm trên mặt gọi là *đỉnh đối diện của mặt đó* .

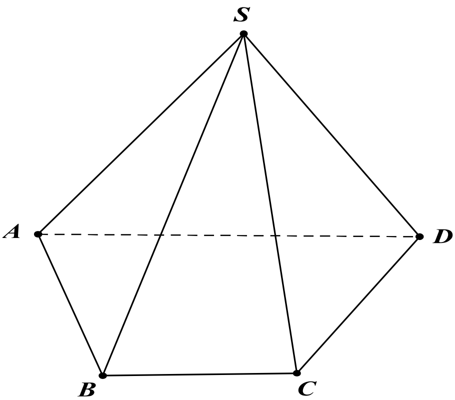
Hình tứ diện có bốn mặt là *các tam giác đều* gọi là hình ***tứ diện đều*** .



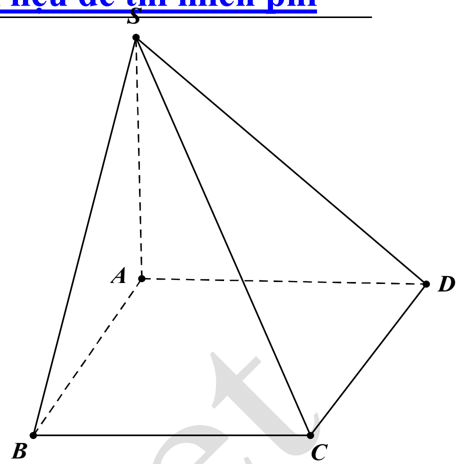
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

BÀI TẬP GIẢI CHI TIẾT

Có bốn dạng toán chính là:

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.
- Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.
- Tìm thiết diện của hình chóp.
- Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui ...

Ta lần lượt xét từng dạng một như sau:

DẠNG 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp:

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng? Ta tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Về dạng này điểm chung thứ nhất thường dễ tìm. Điểm chung còn lại các bạn phải tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng, đồng thời chúng lại thuộc mặt phẳng thứ ba và chúng không song song. Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm chung thứ hai.

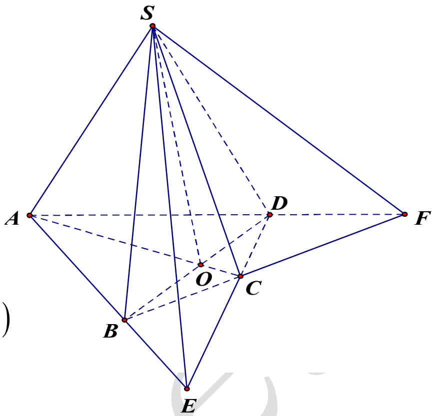
Các bạn phải nhớ kỹ: Giao tuyến là đường thẳng chung của hai mặt phẳng, có nghĩa là giao tuyến là đường thẳng vừa thuộc mặt phẳng này vừa thuộc mặt phẳng kia.

Dạng toán tìm giao tuyến, thường giao tuyến của những câu hỏi đầu hay được sử dụng để tìm giao điểm để làm bài tập ở những câu sau. Ta xét cụ thể những bài toán sau:

Câu 1: Cho tứ giác ABCD sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng (ABCD). Xác định giao tuyến của :
a). Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).
b). Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).
c). Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI

a) Nhìn hình ta dễ dàng thấy S là điểm chung thứ nhất , nối AC và BD lại chúng cắt nhau tại O, thì O là điểm chung thứ hai, AC và BD cắt nhau là vì chúng cùng thuộc mặt phẳng đáy (ABCD). Cách trình bày giao tuyến của (SAC) và (SBD) như sau:



Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Trong mp(ABCD) gọi $O = AC \cap BD$. Vì

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

b) Câu b cũng tương tự (SAB) và (SCD) có điểm chung thứ nhất là S , điểm chung thứ hai là E , với E là giao điểm của AB và CD vì hai đường thẳng này cũng thuộc mặt phẳng (ABCD) và chúng không song song với nhau . Cách trình bày cũng như câu a) :

Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)(3)$

Trong mp(ABCD) gọi

$$E = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} E \in AB, AB \subset (SAB) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SE$

c) Câu này cũng vậy S là điểm chung thứ nhất , điểm chung thứ hai là giao điểm của AD và BC, vì hai đường thẳng này cũng thuộc mp(ABCD) và chúng không song song ,ta trình bày như sau:

Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)(5)$

$(AB, CD \subset (ABCD))$ Gọi

$$F = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} F \in AD, AD \subset (SAD) \\ F \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)(6)$$

Từ (5) (6) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SF$.

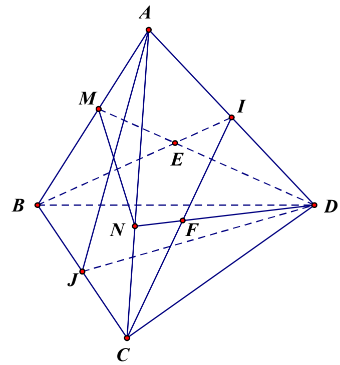
Câu 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC.

a) Tìm giao tuyến của 2 mp (IBC) và mp (JAD).

b) Lấy điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mp (IBC) và mp (DMN).

BÀI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của 2 mp (IBC) và mp (JAD).



Có $\begin{cases} I \in (IBC) \\ I \in AD, AD \subset (JAD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IBC) \cap (JAD) \quad (1)$

và $\begin{cases} J \in (JAD) \\ J \in BC, BC \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (IBC) \cap (JAD) (2)$

Từ (1) và (2) : $(IBC) \cap (JAD) = IJ$

b) Tìm giao tuyến của mp (IBC) và mp (DMN).

Trong mp(ABD) gọi

$E = BI \cap DM \Rightarrow \begin{cases} E \in BI, BI \subset (IBC) \\ E \in DM, DM \subset (DMN) \end{cases} \Rightarrow E \subset (IBC) \cap (DMN) \ (1)$

Trong mp(ACD) gọi $F = CI \cap DN$

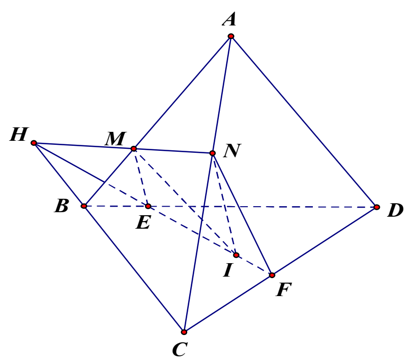
$\Rightarrow \begin{cases} F \in CI, CI \subset (IBC) \\ F \in DN, DN \subset (DMN) \end{cases} \Rightarrow F \subset (IBC) \cap (DMN) \ (2)$

Từ (1) và (1) : $(IBC) \cap (DMN) = EF$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC. Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của :
a). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (BCD).
b). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ABD).
c). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ACD).

LỜI GIẢI

a) Mp (MNI) và mp (BCD).



Ta có $I \in (IMN) \cap (BCD) \ (1)$,

Trong mp(ABC) gọi $H = MN \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in MN, MN \subset (IMN) \\ H \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (IMN) \cap (BCD) \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(IMN) \cap (BCD) = HI$

b) Mp (MNI) và mp (ABD).

Trong mp(BCD) gọi E và F lần lượt là giao điểm của HI với BD và CD .

Có $\begin{cases} M \in (MNI) \\ M \in AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNI) \cap (ABD) \ (3)$.

Và $\begin{cases} E \in HI \subset (MNI) \\ E \in BD \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNI) \cap (ABD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(MNI) \cap (ABD) = ME$.

c) Mp (MNI) và mp (ACD).

Có $\begin{cases} N \in (MNI) \\ N \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNI) \cap (ACD)$ (5).

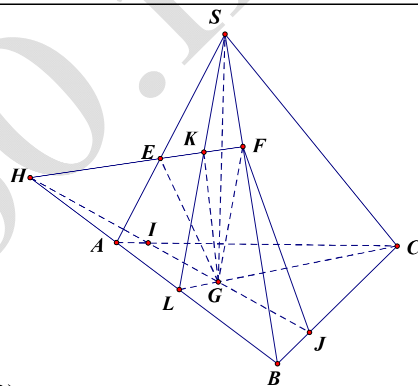
Và $\begin{cases} F \in HI \subset (MNI) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNI) \cap (ACD)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(MNI) \cap (ACD) = NF$

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$. Lấy điểm $E;F$ lần lượt trên đoạn SA, SB và điểm G trọng tâm giác ABC. Tìm giao tuyến của:

a) (EFG) và (SBC). b) (EFG) và (SGC).

LỜI GIẢI



a) Có $G \in (EFG) \cap (ABC)$ (1).

Trong mp(SAB) gọi

$H = EF \cap AB \Rightarrow \begin{cases} H \in EF \subset (EFG) \\ H \in AB \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (EFG) \cap (ABC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$(EFG) \cap (ABC) = HG$.

b) Có $\begin{cases} F \in (EFG) \\ F \in SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (EFG) \cap (SBC)$ (3).

Trong mp(ABC) gọi $J = HG \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in HG \subset (EFG) \\ J \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (EFG) \cap (SBC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(EFG) \cap (SBC) = JF$.

c) Có $G \in (EFG) \cap (SGC)$ (5).

Trong mp(ABC) gọi $L = CG \cap AB \Rightarrow mp(SCL) \equiv mp(SGC)$.

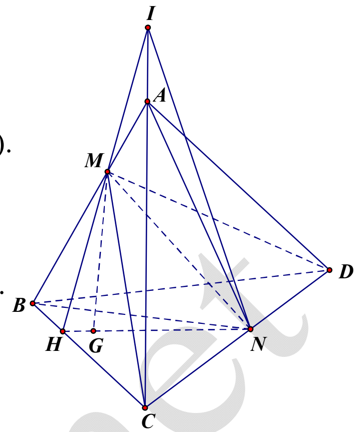
Trong mp(SAB) gọi $K = EF \cap SL \Rightarrow \begin{cases} K \in EF \subset (EFG) \\ K \in SL \subset (SGC) \end{cases} \Rightarrow K \in (EFG) \cap (SGC)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(EFG) \cap (SGC) = GK$.

Câu 5: Cho tứ diện ABCD và điểm $M \in AB; N \in CD$. nằm trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của:

a) (MCD) và (NAB). b) (GMN) và (ACD).

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} M \in (MCD) \\ M \in AB \subset (NAB) \end{cases} \Rightarrow M \in (MCD) \cap (NAB)$ (1).

Có $\begin{cases} N \in CD \subset (MCD) \\ N \in (NAB) \end{cases} \Rightarrow N \in (MCD) \cap (NAB)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(MCD) \cap (NAB) = MN$.

b) Có $\begin{cases} N \in CD \subset (ACD) \\ N \in (GMN) \end{cases} \Rightarrow N \in (ACD) \cap (GMN)$ (3).

Trong mp(BCD) gọi $H = NG \cap BC$

$\Rightarrow mp(HMN) \equiv mp(GMN)$.

Trong mp(ABC) gọi $I = AC \cap HM \Rightarrow \begin{cases} I \in AC \subset (ACD) \\ I \in HM \subset (GMN) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (ACD) \cap (GMN)$ (4).

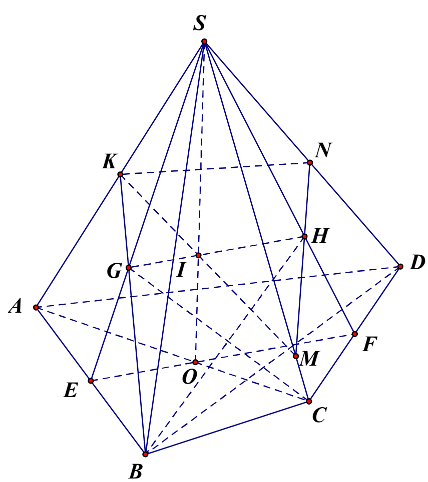
Từ (3) và (4) suy ra $(ACD) \cap (GMN) = NI$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD. Hai điểm G;H lần lượt là trọng tâm ΔSAB; ΔSCD. Tìm giao tuyến của:

a) (SGH) và $(ABCD)$. b) (SGH) và (SAC).

c) (BGH) và (SAD). d) (CGH) và (SBD).

LỜI GIẢI



a) Trong mp(SAB) gọi

$E = SG \cap AB \Rightarrow \begin{cases} E \in SG \subset (SGH) \\ E \in AB \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SGH) \cap (ABCD)$ (1).

Trong mp(SCD) gọi

$F = SH \cap CD \Rightarrow \begin{cases} F \in SH \subset (SGH) \\ F \in CD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SGH) \cap (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$(SGH) \cap (ABCD) = EF$.

b) Có $S \in (SGH) \cap (SAC)$ (3).

Trong mp(ABCD) gọi $O = AC \cap EF \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in EF \subset (SGH) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SGH)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(SAC)\cap(SGH)=SO$.

c) Trong mp(SGH) gọi $I=SO\cap GH\Rightarrow\begin{cases}I\in SO\subset(SAC)\\I\in GH\subset(BGH)\end{cases}\Rightarrow I\in(SAC)\cap(BGH)$ (5).

Trong mp(SAB) gọi

$K=SA\cap BG\Rightarrow\begin{cases}K\in SA\subset(SAC)\\K\in BG\subset(BGH)\end{cases}\Rightarrow K\in(SAC)\cap(BGH)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(SAC)\cap(BGH)=KI$.

d) Có $H\in(SCD)\cap(BGH)$ (7)

Trong mp(SAC) gọi $M=SC\cap KI\Rightarrow\begin{cases}M\in SC\subset(SCD)\\M\in KI\subset(BGH)\end{cases}\Rightarrow M\in(SCD)\cap(BGH)$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $(SCD)\cap(BGH)=MH$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có AB song song CD. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Lấy M thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của :

a). Mp (SAC) và mp (SBD).

b). Mp (SAD) và mp (SBC).

c). Mp (ADM) và mp (SBC).

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

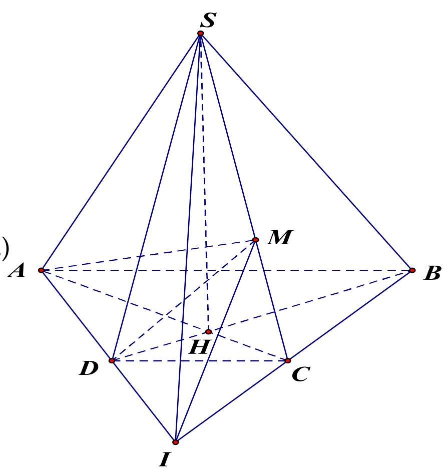
có $S\in(SAC)\cap(SBD)$ (1)

Trong (ABCD) gọi $H=AC\cap BD$

$\Rightarrow\begin{cases}H\in AC\subset(SAC)\\H\in BD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow H\in(SAC)\cap(SBD)(2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$(SAC)\cap(SBD)=SH$.



b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Ta có $S\in(SAD)\cap(SBC)$ (3)

Trong mp(ABCD) gọi

$$I = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} I \in AD \subset (SAD) \\ I \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \ (4)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SI$.

c) Tìm giao tuyến mp (ADM) và mp (SBC).

$$\begin{cases} M \in (ADM) \\ M \in SC, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (ADM) \cap (SBC) \ (5)$$

$$\begin{cases} I \in AD, AD \subset (ADM) \\ I \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (ADM) \cap (SBC) \ (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $(ADM) \cap (SBC) = MI$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD . Hai điểm M;G lần lượt là trọng tâm ΔSAD; ΔSAD; $N \in SG$; P nằm trong tứ giác ABCD. Tìm giao tuyến của:
a). (MNP) và $(ABCD)$. b). (MNP) và (SAC). c). (MNP) và (SCD).

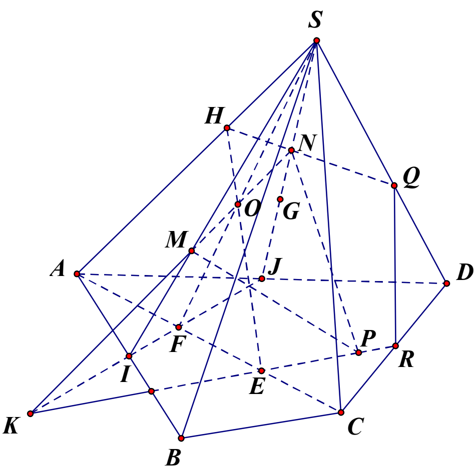
LỜI GIẢI

Hướng dẫn:

a) Theo đề điểm P thuộc mp(ABCD) suy ra P là điểm chung thứ nhất của (MNP) và (ABCD). Ta phải đi tìm điểm chung thứ 2 như sau:

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và AD. Suy ra MN thuộc mp(SIJ), nên MN và IJ cắt nhau tại điểm K. Mà IJ lại thuộc mp(ABCD). Do đó K là điểm chung thứ 2.

b). Điểm chung thứ nhất là giao điểm E của KP và AC (do KP là giao tuyến của (MNP) và (ABCD) nên KP thuộc (ABCD) và KP cũng thuộc (MNP)).



Điểm chung thứ 2 hơi khó tìm (đòi hỏi các bạn phải hình dung hình tốt). Điểm này không có sẵn, ta phải tìm một mặt phẳng chứa một đường thẳng thuộc (MNP). Sau đó tìm giao tuyến a của (SAC) với mp vừa chọn. Giao tuyến a cắt đường thẳng vừa chọn đó là điểm chung thứ 2. Cụ thể như sau:

- *Chọn mp(SIJ) chứa MN. Giao tuyến của (SAC) và (SIJ) là SF với F là giao điểm của AC và IJ. SF cắt MN tại O, thì O là điểm chung thứ 2.*

c) Tìm điểm chung nhờ vào hai giao tuyến vừa tìm ở câu a và b.

- *Do KP là giao tuyến của (MNP) và (ABCD) nên KP cắt CD tại điểm R (Vì KP và CD cùng thuộc mp(ABCD).*

Do OE là giao tuyến của (MNP) và (SAC), nên OE và SA cùng thuộc mp(SAC), do đó chúng giao nhau tại điểm H. Như vậy 2 điểm H và N cùng thuộc mp(SAD), nên đường thẳng HN cắt đường thẳng SD tại điểm Q. Ngoài ra HN lại thuộc mp(MNP), nên Q là điểm chung thứ 2:

Cụ thể trình bày như sau:

a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và AD.

Trong mp(SIJ) gọi

$$K = MN \cap IJ \Rightarrow \begin{cases} K \in MN \subset (MNP) \\ K \in IJ \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (ABCD)\ (1).$$

Có $P \in (MNP) \cap (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (ABCD) = KP$.

b) Trong mp(ABCD) gọi $F = IJ \cap AC \Rightarrow SF = (SAC) \cap (SIJ)$

Trong mp(SIJ) gọi

$$O = MN \cap SF \Rightarrow \begin{cases} O \in MN \subset (MNP) \\ O \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (MNP) \cap (SAC)\ (3).$$

Trong mp(ABCD) gọi $E = KP \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in KP \subset (MNP) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (SAC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SAC) = OE$.

c) Trong mp(SAC) gọi $H = OE \in SA \Rightarrow \begin{cases} H \in OE \subset (MNP) \\ H \in SA \subset (SAD) \end{cases}$

Trong mp(SAD) gọi $Q = NH \cap SD$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in NH \subset (MNP) \\ Q \in SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow Q \in (MNP) \cap (SCD)\ (5)$$

Trong mp(ABCD) gọi $R = KP \cap CD \Rightarrow \begin{cases} R \in KP \subset (MNP) \\ R \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow R \in (MNP) \cap (SCD)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(MNP) \cap (SCD) = QR$.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của :

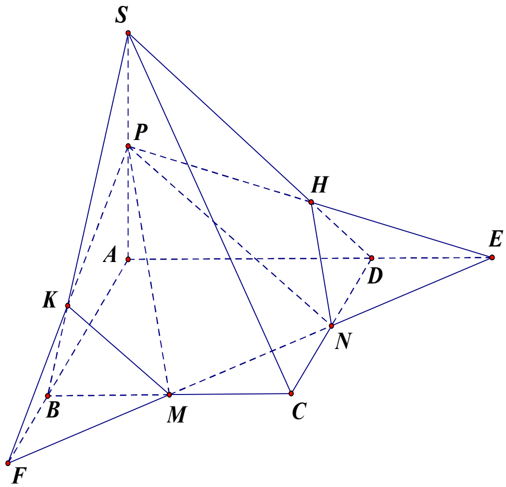
a). Mp (MNP) và mp (SAB). b). Mp (MNP) và mp (SAD).

c). Mp (MNP) và mp (SBC). d). Mp (MNP) và mp (SCD).

LỜI GIẢI

Gọi $F = MN \cap AB$, $E = MN \cap AD \left(\text{vì } MN, AB, AD \subset (ABCD) \right)$

a) Mp (MNP) và mp (SAB).



Có $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA, SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (MNP) \cap (SAB) \ (1)$

Có $\begin{cases} F \in MN, MN \subset (MNP) \\ F \in AB, AB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (MNP) \cap (SAB) \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$(MNP) \cap (SAB) = PF$

b) Mp (MNP) và mp (SAD).

Ta có $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (SAD) (3)$

Và có $\begin{cases} E \in MN, MN \subset (MNP) \\ E \in AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (SAD) (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SAD) = PE$

c) Mp (MNP) và mp (SBC).

Trong mp(SAB) gọi $K = PF \cap SB$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in PF, PF \subset (MNP) \\ K \in SB, SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (SBC) \ (5)$

Và có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SBC) \ (6)$

Từ (5) và (6) suy ra $(MNP) \cap (SBC) = MK$

d) Mp (MNP) và mp (SCD).

Gọi $H = PE \cap SD \left(PE, SD \subset (SAD) \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in PE, PE \subset (MNP) \\ H \in SD, SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNP) \cap (SCD) \ (7)$

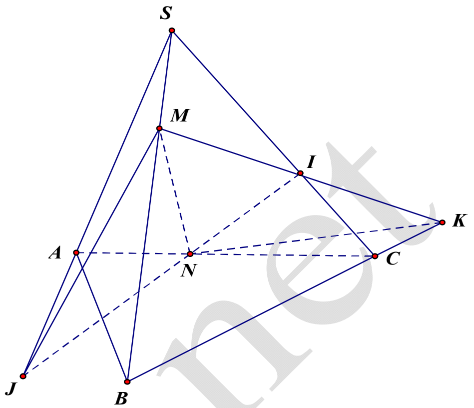
Và có $\begin{cases} N \in (MNP) \\ N \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNP) \cap (SCD) \ (8)$

Từ (7) và (8) suy ra $\left(MNP\right)\cap\left(SCD\right)=NH$

Câu 10: Cho tứ diện S.ABC. Lấy $M\in SB, N\in AC, I\in SC$ sao cho MI không song song với BC, NI không song song với SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt (ABC) và (SAB).

LỜI GIẢI

a. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) và (ABC).



Vì $\begin{cases} N\in\left(MNI\right) \\ N\in AC, AC\subset\left(ABC\right)\end{cases}$

$\Rightarrow N\in\left(MNI\right)\cap\left(ABC\right)\ (1)$

Trong mp(SBC) gọi $K=MI\cap BC$

$\Rightarrow\begin{cases} K\in MI\subset\left(MNI\right) \\ K\in BC\subset\left(ABC\right)\end{cases}$

$\Rightarrow K\in\left(MNI\right)\cap\left(ABC\right)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(MNI\right)\cap\left(ABC\right)=NK$

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với (SAB).

Gọi $J=NI\cap SA\left(NI,SA\subset\left(SAC\right)\right)$

Ta có $\begin{cases} M\in\left(MNI\right) \\ M\in SB, SB\subset\left(SAB\right)\end{cases}\Rightarrow M\in\left(MNI\right)\cap\left(SAB\right)\ (3)$

Và có $\begin{cases} J\in NI\subset\left(MNI\right) \\ J\in SA, SA\subset\left(SAB\right)\end{cases}\Rightarrow J\in\left(MNI\right)\cap\left(SAB\right)\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\left(MNI\right)\cap\left(SAB\right)=MJ$

Câu 11: Cho tứ diện ABCD , M là một điểm bên trong tam giác ABD , N là một điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mp sau :

a) (AMN) và (BCD) b) (DMN) và (ABC)

LỜI GIẢI

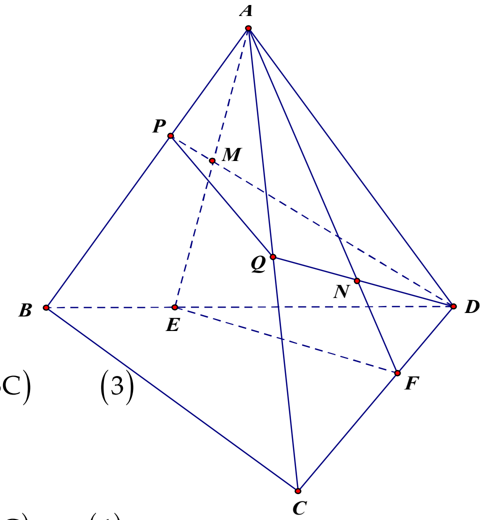
a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD) gọi E = AM ∩ BD

$\Rightarrow\begin{cases} E\in AM, AM\subset\left(AMN\right) \\ E\in BD, BD\subset\left(BCD\right)\end{cases}$

$\Rightarrow E\in\left(AMN\right)\cap\left(BCD\right)\ (1)$

Trong (ACD) gọi F = AN ∩ CD



$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AN, AN \subset (AMN) \\ F \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow F \in (AMN) \cap (BCD) \quad (2)$

Từ (1) và (2): $(AMN) \cap (BCD) = EF$

b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD) gọi P = DM ∩ AB

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in DM, DM \subset (DMN) \\ P \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (DMN) \cap (ABC) \qquad (3)$$

Trong (ACD) gọi Q = DN ∩ AC

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in DN, DN \subset (DMN) \\ Q \in AC, AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (DMN) \cap (ABC) \qquad (4)$$

Từ (3) và (4): $(DMN) \cap (ABC) = PQ$

Câu 12: Cho hình chóp S.ABC; gọi H;K lần lượt là trọng tâm ΔSAB; ΔSBC. M là trung điểm AC; $I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Tìm giao tuyến của:

a) (IHK) và (ABC). b) (IHM) và (SBC).

LỜI GIẢI

a) Gọi P và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

Trong mp(SMN) gọi

$$E = IK \cap MN \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (IHK) \\ E \in MN \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (IHK) \cap (ABC)$ (1).

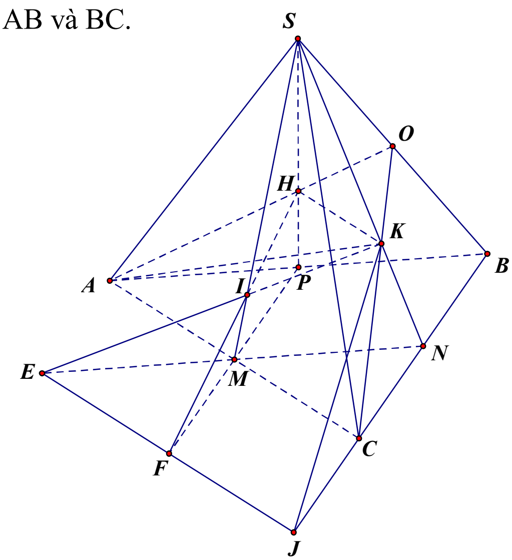
Trong mp(SMP) gọi

$$F = IH \cap MP \Rightarrow \begin{cases} F \in IH \subset (IHK) \\ F \in MP \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow F \in (IHK) \cap (ABC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$(IHK) \cap (ABC) = EF$.



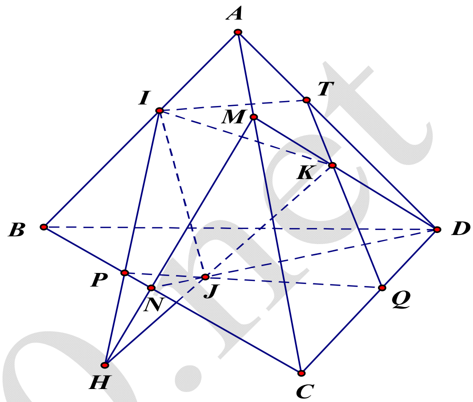
b) Có $K \in (IHK) \cap (SBC)$ (3).

Trong mp(ABC) gọi $J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \subset (IHK) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow J \in (IHK) \cap (ABC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(IHK) \cap (SBC) = JK$.

Câu 13: Cho tứ diện ABCD. Lấy $I \in AB$, J là điểm trong tam giác BCD, K là điểm trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện.

LỜI GIẢI



Gọi $M = DK \cap AC\left(DK, AC \subset (ACD)\right)$,

$N = DJ \cap BC\left(DJ, BC \subset (BCD)\right)$

Và $H = MN \cap KJ\left(MN, KJ \subset (DMN)\right)$,

Vì $H \in MN, MN \subset (ABC) \Rightarrow H \in (ABC)$

Gọi $P = HI \cap BC\left(HI, BC \subset (ABC)\right)$,

$Q = PJ \cap CD\left(PJ, CD \subset (BCD)\right)$

$T = QK \cap AD\left(QK, AD \subset (ACD)\right)$

Theo cách dựng điểm ở trên ta có

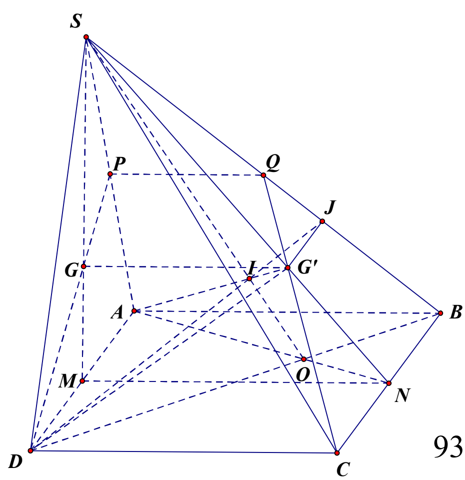
$(IJK) \cap (ABC) = IP;$ $\qquad (IJK) \cap (BCD) = PQ$

$(IJK) \cap (ACD) = QT;$ $\qquad (IJK) \cap (AB) = TI$

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a). (SGG') và $(ABCD)$ b). $(CDGG')$ và (SAB) c). (ADG') và (SBC).

LỜI GIẢI



a) Trong mp(SAD) gọi

$M = SG \cap AD \Rightarrow \begin{cases} M \in SG \subset (SGG') \\ M \in AD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (SGG') \cap (ABCD)$ (1).

Trong mp(SBC) gọi

$N = SG' \cap BC \Rightarrow \begin{cases} N \in SG' \subset (SGG') \\ N \in BC \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow N \in (SGG') \cap (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$(SGG') \cap (ABCD) = MN$.

b) Trong (SAD) gọi $P = DG \cap SA \Rightarrow \begin{cases} P \in DG \subset (CDGG') \\ P \in SA \subset (ASB) \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (CDGG') \cap (SAB)$ (3).

Trong (SBC) gọi $Q = CG' \cap SB \Rightarrow \begin{cases} Q \in CG' \subset (CDGG') \\ Q \in SB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow Q \in (CDGG') \cap (SAB)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(CDGG') \cap (SAB) = PQ$.

c) Có $S \in (SBD) \cap (SAN)$ (5)

Trong (ABCD) gọi $O = BD \cap AN \Rightarrow \begin{cases} O \in BD \subset (SBD) \\ O \in AN \subset (SAN) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SBD) \cap (SAN)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(SBD) \cap (SAN) = SO$.

Trong mp(SAN) gọi $I = SO \cap AG' \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \subset (SBD) \\ I \in AG' \subset (ADG') \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SBD) \cap (ADG')$ (7).

Có $D \in (SBD) \cap (ADG')$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $(SBD) \cap (ADG') = DI$

Trong mp(SBD) gọi $J = SB \cap DI \Rightarrow \begin{cases} J \in SB \\ J \in DI \subset (ADG') \end{cases} \Rightarrow J = SB \cap (ADG')$.

Câu 15: Cho tứ diện S.ABCD, gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA.

a). Tìm giao tuyến SH của 2 mặt phẳng (SCD) và (SAE).

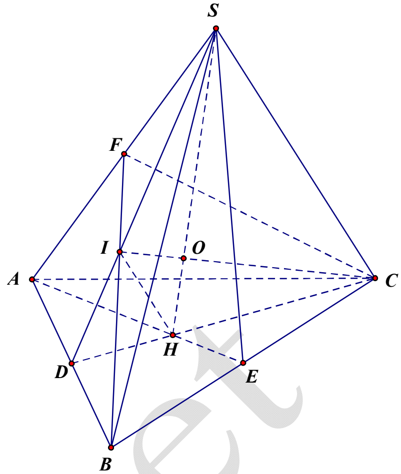
b). Tìm giao tuyến CI của 2 mặt phẳng (SCD) và (BFC).

c). SH và CI có cắt nhau không? Giải thích. Nếu có, gọi giao điểm đó là O, chứng minh $IH \parallel SC$.

d). Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OS}$.

LỜI GIẢI

a) Có $S \in (SCD) \cap (SAE)$ (1).



Trong mp(ABC) gọi $H = AE \cap CD$,

có $\begin{cases} H \in AE \subset (SAE) \\ H \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SAE) \cap (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAE) \cap (SCD) = SH$.

b) Có $C \in (SCD) \cap (BCF)$ (3).

Trong mp(SAB) gọi $I = SD \cap BF$,

có $\begin{cases} I \in SD \subset (SCD) \\ I \in BF \subset (BCF) \end{cases} \Rightarrow I \in (SCD) \cap (BCF)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(SCD) \cap (BCF) = CI$.

c) Theo câu a và b có $SH \subset (SCD)$ và $CI \subset (SCD) \Rightarrow$ SH và CI cắt nhau tại O.

Có H và I lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và SAB.

Trong ΔSCD có $\dfrac{DI}{DS} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HI \parallel SC$ (Theo định lý đảo Ta lét).

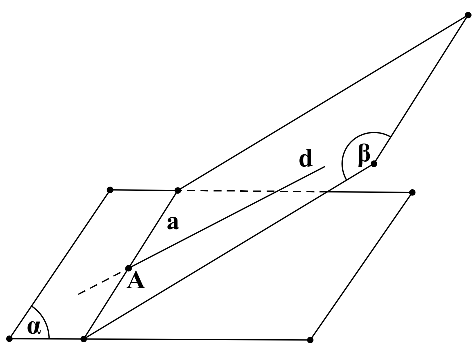
Từ đó suy ra $\Delta OHI \sim \Delta OSC(g.g) \Rightarrow \dfrac{OH}{OS} = \dfrac{HI}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

DẠNG 2: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), có hai cách làm như sau:

Cách 1: Những bài đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P).

Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của d và mặt phẳng (P).



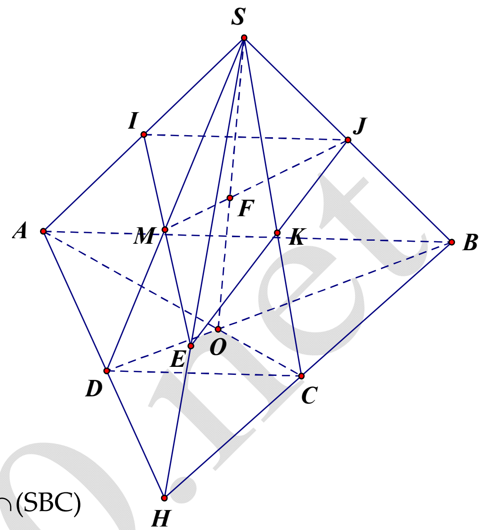
Cách 2: Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d, sao cho dễ dàng tìm giao tuyến với mặt phẳng (P). Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.

BÀI TẬP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I,J là trung điểm $SA;SB$. Lấy điểm M tùy ý trên SD. Tìm giao điểm của:

a) IM và (SBC). b) JM và (SAC). c) SC và (IJM).

LỜI GIẢI



a) Chọn mp(SAD) chứa IM. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Có $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$$H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \subset (SAD) \\ H \in BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow H \in (SAD) \cap (SBC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SH$.

Trong mp(SAD) gọi

$$E = IM \cap SH \Rightarrow \begin{cases} E \in IM \\ E \in SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow E = IM \cap (SBC)$$

b) Chọn mp(SBD) chứa JM. Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC).

Có $S \in (SBD) \cap (SAC)$ (3).

Trong mp(ABCD) gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mp(SBD) gọi $F = JM \cap SO \Rightarrow \begin{cases} F \in JM \\ F \in SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow F = JM \cap (SAC)$.

c) Có $\begin{cases} J \in (IJM) \\ J \in SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (IJM) \cap (SBC)$ (5).

Có $E = IM \cap SH \Rightarrow \begin{cases} E \in IM \subset (IJM) \\ E \in SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJM) \cap (SBC)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(IJM) \cap (SBC) = JE$.

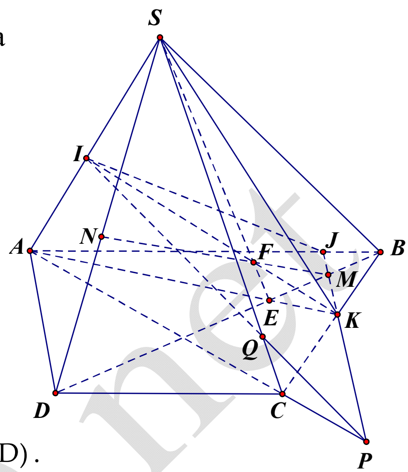
Trong mp(SBC) gọi $K = SC \cap EJ \Rightarrow \begin{cases} K \in SC \\ K \in EJ \subset (IJM) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (IJM)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm trên SA, AB, BC .

a) Tìm giao điểm của IK với (SBD).

b) Tìm các giao điểm của $mp(IJK)$ với SD và SC .

LỜI GIẢI



a) Chọn mp(SAK) chứa IK. Tìm giao tuyến của (SAK) và (SBD).

Có $S \in (SAK) \cap (SBD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$$E = AK \cap BD \Rightarrow \begin{cases} E \in AK \subset (SAK) \\ E \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (SAK) \cap (SBD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAK) \cap (SBD) = SE$.

Trong mp(SAK) gọi

$$F = IK \cap SE \Rightarrow \begin{cases} F \in IK \\ F \in SE \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F = IK \cap (SBD).$$

b) Chọn mp(SBD) chứa SD. Tìm giao tuyến của (SBD) và (IJK).

Có $F = IK \cap SE \Rightarrow \begin{cases} F \in IK \subset (IJK) \\ F \in SE \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (SBD)$ (3).

Trong mp(ABCD) gọi $M = JK \cap BD \Rightarrow \begin{cases} M \in JK \subset (IJK) \\ M \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (IJK) \cap (SBD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(IJK) \cap (SBD) = MF$.

Trong mp(SBD) gọi $N = SD \cap MF \Rightarrow \begin{cases} N \in SD \\ N \in MF \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (IJK)$.

c) Chọn mp(SAC) chứa SC. Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJK).

Có $\begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (SAC)$ (5).

Trong mp(ABCD) gọi $P = JK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} P \in JK \subset (IJK) \\ P \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow P \in (IJK) \cap (SAC)$ (6).

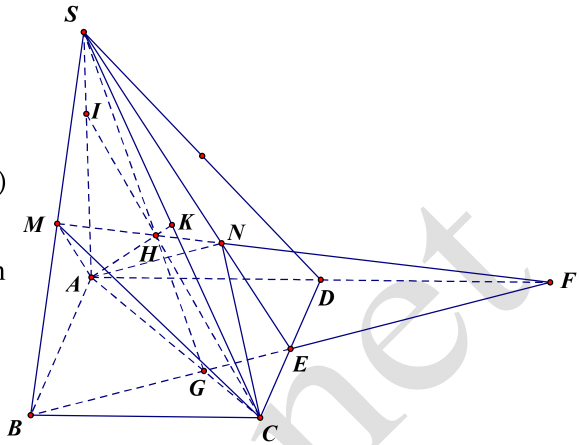
Từ (5) và (6) suy ra $(IJK) \cap (SAC) = IP$.

Trong mp(SAC) gọi $Q = SC \cap IP \Rightarrow \begin{cases} Q \in SC \\ Q \in IP \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (IJK)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SB; N là trọng tâm ΔSCD. Xác định giao điểm của:

a) MN và $(ABCD)$.	b) MN và (SAC).
c) SC và (AMN).	d) SA và (CMN).

LỜI GIẢI



a) Gọi E trung điểm của CD.

Trong mp(SBE) gọi

$$F = MN \cap BE \Rightarrow \begin{cases} F \in MN \\ F \in BE \subset (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow F = MN \cap (ABCD)$.

b) Chọn mp(SBE) chứa MN. Tìm giao tuyến (SBE) và (SAC).

Có $S \in (SAC) \cap (SBE)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$$G = AC \cap BE \Rightarrow \begin{cases} G \in AC \subset (SAC) \\ G \in BE \subset (SBE) \end{cases}$$

$\Rightarrow G \in (SAC) \cap (SBE)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBE) = SG$.

Trong mp(SBE) gọi $H = MN \cap SG \Rightarrow \begin{cases} H \in MN \\ H \in SG \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H = MN \cap (SAC)$.

c) Chọn mp(SAC) chứa SC. Tìm giao tuyến (SAC) và (AMN).

Có $A \in (SAC) \cap (AMN)$ (3).

Có $H = MN \cap SG \Rightarrow \begin{cases} H \in MN \subset (AMN) \\ H \in SG \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H \in (AMN) \cap (SAC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(AMN) \cap (SAC) = AH$.

Trong mp(SAC) gọi $K = SC \cap AH \Rightarrow \begin{cases} K \in SC \\ K \in AH \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (AMN)$.

d) Chọn mp(SAC) chứa SA. Tìm giao tuyến (SAC) và (CMN).

Có $C \in (SAC) \cap (CMN)$ (5).

Có $H = MN \cap SG \Rightarrow \begin{cases} H \in MN \subset (CMN) \\ H \in SG \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H \in (CMN) \cap (SAC)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(CMN) \cap (SAC) = CH$.

Trong mp(SAC) gọi $I = SA \cap CH \Rightarrow \begin{cases} I \in SA \\ I \in CH \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow I = SA \cap (CMN)$.

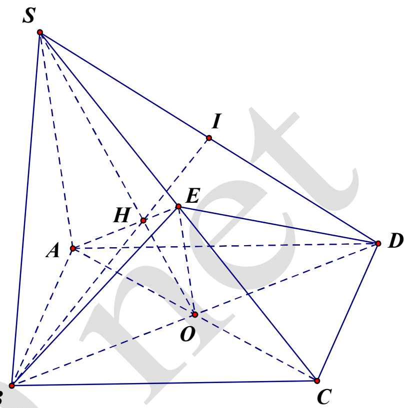
Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi E là trung điểm của SC.

a). Tìm giao tuyến của (BED) và (SAC).

b). Tìm giao tuyến của (ABE) và (SBD).

c). Tìm giao điểm của SD và (AEB).

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} E \in (BDE) \\ E \in SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (BDE) \cap (SAC) (1)$

Trong mp(ABCD) gọi

$O = BD \cap AC \Rightarrow \begin{cases} O \in BD \subset (BDE) \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (BDE) \cap (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(BDE) \cap (SAC) = EO$.

b) Có $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Trong mp(SAC) gọi

$H = AE \cap SO \Rightarrow \begin{cases} H \in AE \subset (ABE) \\ H \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABE) \cap (SBD)$ (3).

Có $B \in (ABE) \cap (SBD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(ABE) \cap (SBD) = BH$

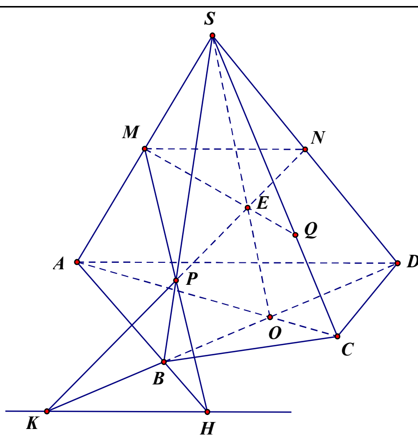
Trong mp(SBD) gọi $I = SD \cap BH \Rightarrow \begin{cases} I \in SD \\ I \in BH \subset (ABE) \end{cases} \Rightarrow I = SD \cap (ABE)$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD, P là điểm thuộc cạnh SB sao cho: $SP = 3PB$.

a). Tìm giao điểm Q của SC và (MNP).

b). Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

LỜI GIẢI



a) Gọi $O = AC \cap BD$, có

$SO = (SAC) \cap (SBD)$

Trong mp(SBD) gọi $E = PN \cap SO$,

có $\begin{cases} E \in PN \subset (MNP) \\ E \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (MNP) \cap (SAC)$ (1)

Có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (MNP) \cap (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy r a $(MNP) \cap (SAC) = ME$.

Trong mp(SAC) gọi $Q = ME \cap SC$, có $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in ME \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$.

Trong mp(SBD) gọi $K = PN \cap BD$, có $\begin{cases} K \in PN \subset (MNP) \\ K \in BD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (MNP) \cap (ABCD)$ (1).

Trong mp(SAB) gọi $H = PM \cap AB$, có $\begin{cases} H \in MP \subset (MNP) \\ H \in AB \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (MNP) \cap (ABCD)$ (2).

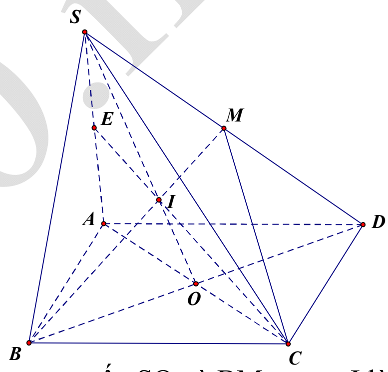
Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (ABCD) = KH$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm của SD.

a) Tìm giao điểm I của BM với mp(SAC). Chứng minh: $BI = 2IM$.

b) Tìm giao điểm E của SA với mp(BCM). Chứng minh E là trung điểm của SA.

LỜI GIẢI



a) Có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$O = AC \cap BD \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mp(SBD) gọi

$I = BM \cap SO \Rightarrow \begin{cases} I \in BM \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow I = BM \cap (SAC)$.

Trong ΔSBD có I là giao điểm của hai đường trung tuyến SO và BM suy ra I là trọng tâm của ΔSBD. Do đó $BI = 2IM$.

b) Có $C \in (BCM) \cap (SAC)$ (3).

Có $I = BM \cap SO \Rightarrow \begin{cases} I \in BM \subset (BCM) \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (BCM) \cap (SAC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(BCM) \cap (SAC) = CI$.

Trong mp(SAC) gọi $E = SA \cap CI \Rightarrow \begin{cases} E \in SA \\ E \in CI \subset (BCI) \end{cases} \Rightarrow E = SA \cap (BCI)$.

Vì I trọng tâm của $\Delta SBD \Rightarrow SI = \frac{2}{3}SO$. Trong ΔSAC có SO là đường trung tuyến và $SI = \frac{2}{3}SO \Rightarrow I$ cũng là trọng tâm của ΔSAC.Do đó CI là đường trung tuyến của ΔSAC nên E trung điểm của SA.