BÀI 4: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

BÀI 4: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu $Đ_I$

Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. Từ đó suy ra:

Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$

Nếu $M \neq I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung điểm của MM'.

2) Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó H được gọi là hình có tâm đối xứng.

II) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_0;y_0)$, gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó: $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

III) CÁC TÍNH CHẤT

Phép đối xứng tâm

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.

4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1: Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép đối xứng tâm I.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_0;y_0)$, gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó: $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

Từ đó tìm được tọa độ của ảnh M.

Từ đó ta suy ra được phương trình ảnh của một đường.

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-1;3)$ và đường thẳng d có phương trình $: x - 2y + 3 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O.

LỜI GIẢI

- Gọi $A'(x';y')$ là ảnh của A qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$. Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có:

$\begin{cases} x' = 2x_O - x \\ y' = 2y_O - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(1;-3)$

- Gọi $M(x;y)$ là một điểm bất kỳ thuộc d và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O. Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có : $\begin{cases} x' = 2x_O - x \\ y' = 2y_O - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$.

$M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (-x') - 2(-y') + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0$

$\Leftrightarrow M \in d' : x' - 2y' - 3 = 0$

Do đó ảnh của d là d' có phương trình là : $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 2: Tìm ảnh qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$ của:

a). Điểm $A(3;-4)$.

b). Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

LỜI GIẢI

$Đ_I : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ với $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$.

a) $A(3;-4)$ biến thành $A'(-1;8)$.

b) Đường tròn (C) tâm $J(-1;3)$ và bán kính $R = 4$

Gọi $J' = Đ_I(J) \Rightarrow J'(3;1)$

Gọi $(C') = Đ_I(C) \Rightarrow (C')$ có tâm $J'(3;1)$ và bán kính $R' = R = 4$. Do đó (C') có phương trình: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0$ và $d' : x - 2y - 8 = 0$. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó .

LỜI GIẢI

Gọi $I(a;b)$ là tâm đối xứng cần tìm.

Gọi $M(x;y) \in d \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = -2$ (1)

Gọi $M'(x';y') = Đ_I(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Ngoài ra có $M'(x';y') \in d' \Leftrightarrow x' - 2y' - 8 = 0 \Leftrightarrow (2a - x) - 2(2b - y) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow -(x - 2y) + 2a - 4b - 8 = 0$ (2).

Thay (1) vào (2) được: $a - 2b = 3$

- Để trục Ox thành chính nó thì tâm đối xứng phải thuộc trục $Ox \Rightarrow b = 0$

- Từ hai kết quả trên ta có : $\begin{cases} a - 2b = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3;0)$.

Kết luận tâm đối xứng cần tìm là $I(3;0)$

Câu 4: Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và điểm $I(x_0;y_0)$ phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình của Δ'.

LỜI GIẢI

Cho $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm với tâm $I(x_0;y_0)$ thì $x+x'=2x_0; y+y'=2y_0$ nên $x=2x_0-x'; y=2y_0-y'$. Thế vào phương trình Δ thành:

$a(2x_0-x')+b(2y_0-y')+c=0$

Hay: $-(ax'+by'+c)+2(ax_0+by_0+c)=0$

Vậy $(\Delta'): ax+by+c-2(ax_0+by_0+c)=0.$

Câu 5: Cho đường thẳng $d: x-2y+2=0$ và $d': x-2y-8=0$ Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Oy thành chính nó.

LỜI GIẢI

Giao của d, d' với trục Oy là $A(0;1), A'(0;-4)$

Theo giả thiết d thành d' và biến trục Oy thành chính nó thì A biến thành A' nên tâm đối xứng I là trung điểm của AA' là $I\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

DẠNG 2: Dùng phép đối xứng tâm để giải một số bài toán hình học.

Câu 1: Qua phép đối xứng tâm $Đ_O$, những điểm nào biến thành chính nó, những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?

LỜI GIẢI

Điểm O biến thành chính nó. Mọi đường thẳng đi qua O đều biến thành chính nó. Mọi đường tròn có tâm O đều biến thành chính nó.

Câu 2: giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh:

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d'.

b) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

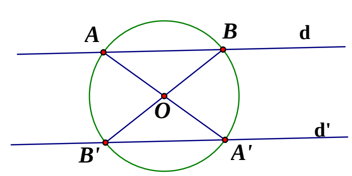
LỜI GIẢI

a) Hạ $OH \perp d$, vì d không đi qua O nên H không trùng với O. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến H thành H' thì O là trung điểm của HH' và biến đường thẳng d thành đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'. Suy ra d và d' song song, cách đều điểm O.

b) Nếu d không đi qua O thì theo câu a), $d' \parallel d$ nên d' không trùng d. Nếu d đi qua O thì mọi điểm $M \in d$ biến thành điểm $M' \in d$. Vậy d' trùng với d.

Câu 3: Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

LỜI GIẢI



Dựng đường tròn $(O;R)$ sao cho nó cắt d tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng các đường thẳng AO và BO, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại A' và B'.

Dựng đường thẳng d' đi qua A' và B'. Phép dựng trên đây chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Câu 4: Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây; tam giác đều, hình bình hành, lục giác đều, đường tròn, hình gồm hai đường tròn bằng nhau.

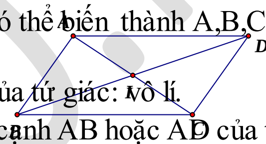
LỜI GIẢI

- Tam giác đều không có tam đối xứng
- Hình bình hành có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.
- Lục giác đều có một tâm đối xứng là tâm của chúng.
- Đường tròn có một tâm đối xứng là tâm của chúng.
- Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm.

Câu 5: Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì đó là hình bình hành.

LỜI GIẢI

Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng là I. Đỉnh A chỉ có thể biến thành A,B,C hay D.



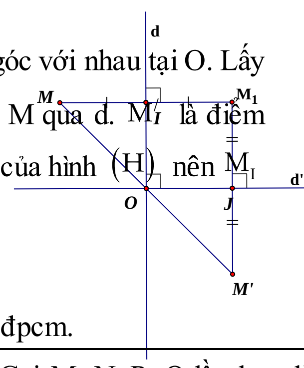
- Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì A là tâm đối xứng của tứ giác: vô lí.
- Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác: vô lí

Vậy A chỉ có thể biến thành đỉnh C.

Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

Câu 6: Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

LỜI GIẢI



Giả sử hình (H) có hai trục đối xứng d và d' vuông góc với nhau tại O. Lấy M là điểm bất kì thuộc hình (H), M_I là điểm đối xứng M qua d. M' là điểm đối xứng với M_I qua d' vì d và d' đều là trục đối xứng của hình (H) nên M_I và M' đều thuộc (H).

Gọi I, J là trung điểm của MM_I, M_IM' ta có:

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{M'J}+\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{M'O}\Rightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=0\Rightarrow$ đpcm.

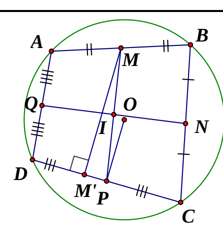
Câu 7: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA. Hạ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.

a). Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến các đường thẳng MM', NN', PP', QQ' thành những đường thẳng nào?

b). Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I,O?.

LỜI GIẢI

Vì MNPQ là hình bình hành nên I là trung điểm MP và NQ.



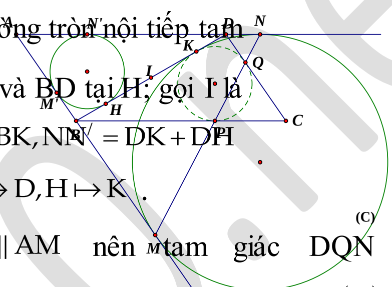
Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng $MM^/$ thành đường thẳng đi qua P và song song với $MM^/$, tức là vuông góc với DC

Do đó đường thẳng $MM^/$ được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự; đường thẳng $NN^/$ biến thành đường thẳng QO, đường thẳng $PP^/$ biến thành đường thẳng MO, đường thẳng $QQ^/$ biến thành đường thẳng NO.

b) Vì bốn đường thẳng MO,NO,PO,QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng $MM^/, NN^/, PP^/, QQ^/$ đồng quy tại $O^/$ đối xứng với tâm O qua I.

Câu 8: Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (C) bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB Và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.

LỜI GIẢI

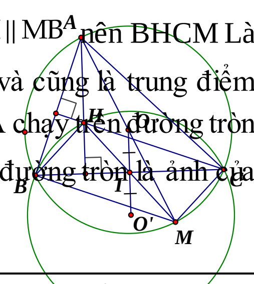


Gọi K là tiếp điểm của (C) với BD; (V) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại $M^/$ với AD tại $N^/$ và BD tại H; gọi I là trung điểm BD. Từ $MM^/ = NN^/$ và $MM^/ = BH + BK, NN^/ = DK + DH$ suy ra $BH = DK$ ta có phép đối xứng qua $Đ_I : B \mapsto D, H \mapsto K$.

Tam giác AMN cân tại A và vì $DQ \parallel AM$ nên tam giác DQN cân tại D suy ra $DQ = DN = DK = BH = BM^/$. Do đó, Q là ảnh của $M^/$ trong phép $Đ_I$, phép $Đ_I : (V) \mapsto (V^/)$ đi qua ba điểm K,Q,P. Vì $M^/, N^/, H$ là các điểm chung duy nhất của (V) với AB,AD và BC do đó K,Q,P cũng là điểm chung duy nhất của $(V^/)$ với BD, CD, CB suy ra đpcm.

Câu 9: Cho hai điểm B,C cố định trên đường tròn $(O;R)$ và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

LỜI GIẢI

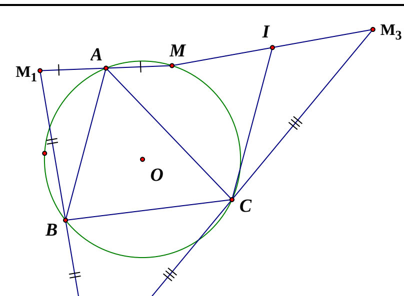


Vẽ đường kính AM của đường tròn thì có $BH \parallel MC$ và $CH \parallel MB$ nên BHCM Là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH. Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H. Khi A chạy trên đường tròn $(O;R)$ thì M chạy trên đường tròn $(O;R)$. Do đó H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép đối xứng với tâm I.

Câu 10: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng M qua A, M_2 là điểm đối xứng M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng M_2 qua C. Chứng minh phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm. Suy ra quỹ tích điểm M_3.

LỜI GIẢI

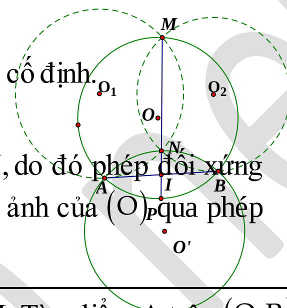
Gọi I là trung điểm của MM_3, ta có:



$\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{M_2C}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M}=\overrightarrow{BA}$ như vậy điểm I cố định, do đó phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là phép đối xứng qua điểm I. Vì M thay đổi trên (O) nên quỹ tích điểm M_3 là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

Câu 11: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích các điểm N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2)

LỜI GIẢI



Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

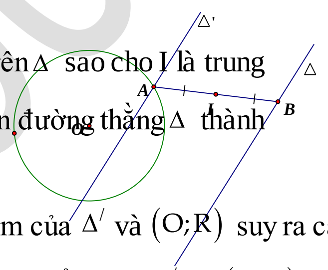
$IA^2=IM.IN=IB^2\Rightarrow IA=IB\Rightarrow I$ là trung điểm của AB cố định.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (O) ta có:

$IA^2=IA.IB=IM.IP\Rightarrow IN=IP$ nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N. Vì quỹ tích N là đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.

Câu 12: Cho đường tròn $(O;R)$, đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên $(O;R)$ và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

LỜI GIẢI



Giả sử có điểm A trên đường tròn $(O;R)$ và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm AB, phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến B thành A nên biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' đi qua A.

Mặt khác A lại nằm trên $(O;R)$ nên A phải là giao điểm của Δ' và $(O;R)$ suy ra cách dựng đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$. Lấy A là giao điểm của Δ' và $(O;R)$, còn B là giao điểm của đường thẳng AI và đường thẳng Δ.

Số nghiệm hình là số giao điểm của Δ' và $(O;R)$.

Câu 13: Cho 5 điểm P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 dựng một hình ngũ giác ABCDE sao cho trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE và EA lần lượt là P_1,P_2,P_3,P_4,P_5.

LỜI GIẢI

Giả sử đã dựng ngũ giác ABCDE theo yêu cầu. Lấy một điểm A' tùy ý, và gọi B' là điểm đối xứng của A' qua P_1, C' là điểm đối xứng của B' qua P_2, D' là điểm đối xứng của C' qua P_3, E' là điểm đối xứng của D' qua P_4 và A'' là điểm đối xứng của E' qua P_5.

Khi đó $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{P_1A'}-\overrightarrow{P_1A}=-\overrightarrow{P_1B'}+\overrightarrow{P_1B}=-\overrightarrow{BB'}$

Tương tự $\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{CC'};\overrightarrow{CC'}=-\overrightarrow{DD'};\overrightarrow{DD'}=-\overrightarrow{EE'};\overrightarrow{EE'}=-\overrightarrow{AA'}$

Do đó $\overrightarrow{AA^{/}} = -\overrightarrow{AA^{//}}$ nên A là trung điểm $AA^{//}$. Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm $A^{/}$ bất kì, rồi dựng các điểm $B^{/}, C^{/}, D^{/}, E^{/}, A^{//}$ như trên. Cuối cùng dựng trung điểm A của đoạn thẳng $AA^{//}$ thì A là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.

Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác ABCDE và $A^{/}B^{/}C^{/}D^{/}E^{/}$ cùng thỏa mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có $\overrightarrow{AA^{/}} = -\overrightarrow{AA^{/}}$ nên $\overrightarrow{AA^{/}} = 0$ tức là A trùng với $A^{/}$ và B,C,D,E trùng với $B^{/}, C^{/}, D^{/}, E^{/}$.