BÀI 7: PHÉP VỊ TỰ

A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M', sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O,k)}$ (O được gọi là tâm vị tự).

Nhận xét:

Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

Phép vị tự tỉ số $k = 1$ chính là phép đồng nhất.

Phép vị tự tâm I tỉ số $k = -1$ chính là phép đối xứng qua tâm I.

$M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(M')$

II) CÁC TÍNH CHẤT

1) Định lí 1: Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

2) Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ các định lí trên ta có các hệ quả sau:

3) Hệ quả

Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã ch.

b) Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.

c) Biến tia thành tia.

d) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.

e) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.

f) Biến góc bằng góc ban đầu.

Chú ý:

Qua phép $V_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng d qua tâm vị tự O.

III) ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 3: Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Chú ý: Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì $|k| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm\frac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{OI}$.

IV) TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự trong.

Hai đường tròn có bán kính bằng nhau và khác tâm thì chỉ có một tâm vị tự trong, đó chính là trung điểm của đoạn nối tâm.

Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự ngoài và một tâm vị tự trong.

Đường tròn (C) biến thành chính nó khi và chỉ khi đường tròn (C) có tâm là tâm vị tự và tỉ số vị tự $k=\pm1$.

B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1: Tìm tọa độ hay phương trình của ảnh qua phép vị tự tâm $I(a;b)$ tỉ số k.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc một đường nào đó.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm I, tỉ số k. Ta có:

$$\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-a=k(x-a)\\y'-b=k(y-b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=k(x-a)+a\\y'=k(y-b)+b\end{cases}\quad(I)$$

Từ (I) ta tìm được tọa độ M' là ảnh của M.

Từ đó ta cũng tìm được phương trình ảnh của một đường nào đó.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $d:3x+2y-6=0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số vị tự $k=-2$?

LỜI GIẢI

Gọi $M(x;y)\in d\Leftrightarrow 3x+2y-6=0$ (1).

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$:

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=-2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-1=-2(x-1)\\y'-2=-2(y-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'-1}{-2}+1=\dfrac{x'-3}{-2}\\y=\dfrac{y'-2}{-2}+2=\dfrac{y'-6}{-2}\end{cases}.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x'-3}{-2}\right)+2\left(\dfrac{y'-6}{-2}\right)-6=0\Leftrightarrow 3x'+2y'-9=0$

$\Leftrightarrow M'\in d':\Leftrightarrow 3x'+2y'-9=0$

Do vậy ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự là $d':3x+2y-9=0$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+1)^2=9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k=-2$.

LỜI GIẢI

Đường tròn (C) có tâm $K(3;-1)$ bán kính $R=3$. Gọi $K'(x';y')$ là tâm và R' là bán kính của (C'), với (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$. Ta có tọa độ của K' thỏa mãn biểu thực tọa độ của phép vị tự :

$$\begin{cases}\overrightarrow{IK'}=-2\overrightarrow{IK}\\R'=|-2|R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-1=-2(x-1)\\y'-2=-2(y-2)\\R'=2R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-1=-2(3-1)\\y'-2=-2(-1-2)\\R'=2.3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-3\\y'=8\\R'=6\end{cases}\Rightarrow K'(-3;8)$$

Vậy (C'): $\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-6)^2=36$

Câu 3: Cho ba điểm $A(0;3), B(2;-1), C(-1;5)$. Tồn tại hay không tồn tại một phép vị tự tâm A tỉ số k để biến B thành C?

LỜI GIẢI

Giả sử tồn tại một phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C.

Có $C = V_{(A;k)}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k.2 \\ 2 = k.(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$ (đúng). Kết luận tồn tại phép vị tự tâm A tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ để biến B thành C.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy cho hai Parabol có phương trình $y = ax^2$ và $y = bx^2 (a \neq b)$. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến Parabol này thành Parabol kia.

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng Oxy, phép vị tự $V_{(O;k)}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(kx;ky)$.

Gọi (P_1) là Parabol $y = ax^2$ và (P_2) là Parabol $y = bx^2$.

Ta chứng minh $V_{(O;k)} : (P_1) \to (P_2)$ với hệ số tỉ lệ $k = \frac{b}{a}$.

Thật vậy, nếu $M(x;y) \in (P_1)$ thì $(x_1;y_1) = (x_1;ax_1^2)$ nên ảnh M' có tọa độ: $\left(\frac{a}{b}x_1;\frac{a}{b}ax_1^2\right) = \left(\frac{a}{b}x_1;b\left(\frac{a}{b}ax_1\right)^2\right) = (x_2;bx_2^2) \in (P_2)$ (đpcm).

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A;2)$ và $(B;4)$.

LỜI GIẢI

Hai đường tròn đã cho không đồng tâm và có bán kính lần lượt $R = 2, R' = 4$, nên có hai phép vị tự tỉ số $k = \pm\frac{R'}{R} = \pm 2$ biến đường tròn $(A;2)$ thành đường tròn $(B;4)$. Gọi $I(x;y)$ là tâm vị tự, ta có

$$\overrightarrow{IB} = \pm 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = \pm 2(2 - x) \\ 4 - y = \pm 2(1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4; y = -2 \\ x = 4; y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy tâm vị tự ngoài là $I(-4;-2)$ và tâm vị tự trong là $I'(4;2)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một phép biến hình T biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$ xác định bởi biểu thức tọa độ sau đây: $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$

a) Chứng minh T là một phép vị tự.

b) Tìm ảnh (C') của đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$ qua phép biến hình T.

LỜI GIẢI

Gọi I là điểm biến hình chính nó qua phép biến hình đã cho. Ta có $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(2;1)$ biến thành chính nó là tâm vị tự.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (x-2; y-1); \overrightarrow{IM'} = (x'-2; y'-1) = (3x-6; 3y-3) = 3(x-2; y-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$. Vậy T là phép vị tự tâm $I(2;1)$ tỉ số $k = 3$.

b) Từ $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x'+4) \\ y = \frac{1}{3}(y+2) \end{cases}$, thay vào $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$ ta được:

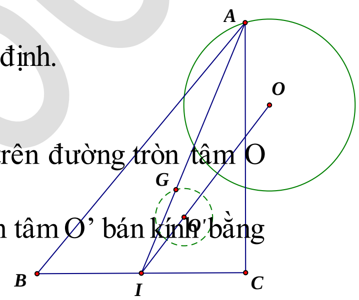
$$\frac{1}{9}(x'+4)^2 + \left(\frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (x'+4)^2 + (y'-1)^2 = 9$$

Vậy phương trình $(C'): (x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$.

DẠNG 2: Tìm quỹ tích:

Câu 7: Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R). Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

LỜI GIẢI



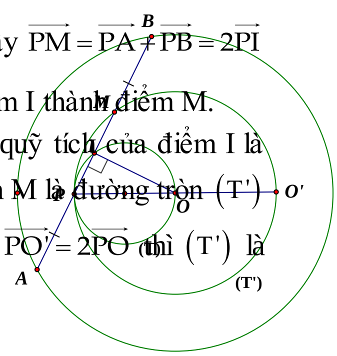
Gọi I trung điểm của BC, do BC cố định nên I cố định.

Vì G là trọng tâm

$\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow G = V_{\left(I;\frac{1}{3}\right)}(A)$. Vì A di động trên đường tròn tâm O bán kính R suy ra tập hợp điểm G nằm trên đường tròn tâm O' bán kính bằng $\frac{R}{3}$ với $O' = V_{\left(I;\frac{1}{3}\right)}(O)$.

Câu 2: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P, cắt (O) tại hai điểm A và B. Tìm quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

LỜI GIẢI



Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{PI} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$, bởi vậy $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$

Gọi V là phép vị tự tâm P tỉ số $k = 2$ thì V biến điểm I thành điểm M.

Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$. Suy ra quỹ tích của điểm I là đường tròn (T) đường kính PO. Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn (T') ảnh của (T) qua phép vị tự V. Nếu ta lấy O' sao cho $\overrightarrow{PO'} = 2\overrightarrow{PO}$ thì (T') là đường tròn đường kính PO'.

DẠNG 3: DỰNG HÌNH

PHƯƠNG PHÁP:

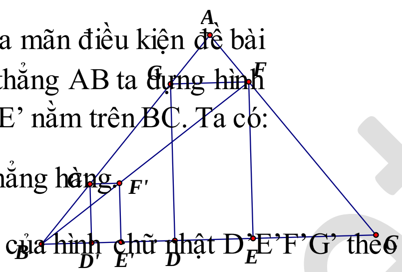
Để dựng điểm M, ta có thể xem M như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép vị tự, hoặc xem M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép vị tự.

Câu 1: Cho tam giác ABC có hai góc B và C nhọn. Dựng hình chữ nhật DEFG có $EF = 2DE$ với hai đỉnh D, E nằm trên BC và hai đỉnh F, G lần lượt nằm trên AC, AB.

LỜI GIẢI

Giả sử đã dựng được hình chữ nhật DEFG thỏa mãn điều kiện đề bài (hình 1). Khi đó từ một điểm G' tùy ý trên đoạn thẳng AB ta dựng hình chữ nhật D'E'F'G' có $E'F' = 2D'E'$, hai đỉnh D', E' nằm trên BC. Ta có:

$\frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'} = \frac{2GF}{2G'F'} = \frac{GF}{G'F'}$. Do đó B, F', F thẳng hàng.



Hình 1

Từ đó có thể xem hình chữ nhật DEFG là ảnh của hình chữ nhật D'E'F'G' theo phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{BG}{BG'}$. Từ đó ta có cách dựng:

Lấy điểm G' tùy ý trên cạnh AB

Dựng hình chữ nhật D'E'F'G' có $E'F' = 2D'E'$ hai đỉnh D', E' nằm trên BC.

Đường thẳng BF' cắt cạnh AC tại F. Đường thẳng qua F song song với BC cắt cạnh AB tại G. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của F, G trên đường thẳng BC.

Ta sẽ chứng minh DEFG là hình chữ nhật cần dựng:

Thật vậy, vì $GF \parallel G'F',\ GD \parallel G'D'$ nên $\frac{GF}{G'F'} = \frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'}$. Từ đó suy ra

$\frac{GD}{GF} = \frac{G'D'}{G'F'} = 2$. Do đó hình chữ nhật DEFG là hình cần dựng.

Câu 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hãy dựng hình vuông MNPQ, sao cho M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, AC và P, Q nằm trên cạnh BC.

LỜI GIẢI

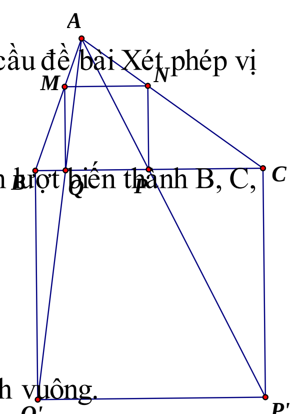
Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét phép vị tự tâm A tỉ số $k = \frac{AB}{AM}$.

Qua phép vị tự tâm A tỉ số k thì các điểm M, N, P, Q lần lượt biến thành B, C, P', Q' (hình 2). Ta có:

$MQ \parallel BQ' \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BQ'}$, mà

$MN = MQ \Rightarrow BC = BQ'$.

Tương tự ta có $BC = CP'$. Do đó tứ giác BCP'Q' là hình vuông.



Hình 2

Ta dựng được BCP'Q' nên dựng được hai điểm P, Q. Vậy dựng được hình vuông MNPQ.

Cách dựng:

Dựng hình vuông BCP'Q' về phía ngoài tam giác ABC.

Dựng $P = V_{(A;k')}(P'),\ Q = V_{(A;k')}(Q'),\ M = V_{(A;k')}(B'),\ N = V_{(A;k')}(C')$ với $k' = \frac{1}{k}$.

Ta được tứ giác MNPQ là hình vuông cần dựng.

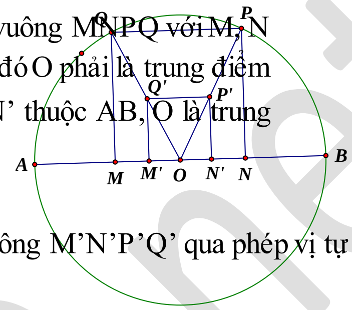
Chứng minh

Ta có tứ giác MNPQ là ảnh của tứ giác BCP'Q' qua $V_{(A;k')}$, mà tứ giác BCP'Q' là hình vuông nên tứ giác MNPQ là hình vuông.

Bài toán có một nghiệm hình.

Câu 3: Cho nữa đường tròn đường kính AB. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên nữa đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính AB.

LỜI GIẢI



Gọi O trung điểm của AB. Giả sử dựng được hình vuông MNPQ với M, N thuộc đường kính AB; P, Q thuộc nữa đường tròn. Khi đó O phải là trung điểm của MN. Nếu lấy ḥnh vuông M'N'P'Q' sao cho M', N' thuộc AB, O là trung điểm của M'N', thì dễ thấy $\frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$

Từ đó suy ra hình vuông MNPQ là ảnh của hình vuông M'N'P'Q' qua phép vị tự tâm O, suy ra O, P, P' và O, Q, Q' thẳng hàng. Vậy ta có cách dựng:

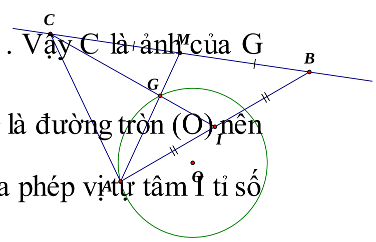
Dựng hình vuông M'N'P'Q' nằm trong nữa hình tròn sao cho M'N' thuộc AB và O là trung điểm của M'N'. Tia OP' cắt nữa đường tròn tại P; tia OQ' cắt nữa đường tròn tại Q.

Khi đó dễ thấy tứ giác MNPQ là hình vuông cần dựng.

Câu 4: Cho điểm A cố định trên đường tròn (O) và điểm B cố định nằm trên đường thẳng d không đi qua A. Hãy xác định trên d một điểm C, sao cho tam giác ABC có trọng tâm nằm trên đường tròn (O).

LỜI GIẢI

Giả sử điểm C đã dựng được. Gọi I trung điểm của AB, ta có I cố định.



Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{IC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IG}$. Vậy C là ảnh của G qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{3}{2}$. Mà tập hợp điểm G là đường tròn (O) nên điểm C nằm trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{3}{2}$.

Mặt khác $C \in d$, do đó C là giao điểm của (O') và d.

Cách dựng:

Dựng trung điểm I của AB.

Dựng đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{3}{2}$.

Dựng điểm C là giao điểm của d và đường tròn (O').

Khi đó C là điểm cần dựng.

Chứng minh

Trong tam giác ABC có CI là đường trung tuyến. Nếu gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $V_{\left(I;\frac{2}{3}\right)}$ biến C thành G nên qua $V_{\left(I;\frac{2}{3}\right)}$ đường tròn (O') biến thành (O) hay $G\in(O)$. Vậy C là điểm cần dựng.

Biện luận

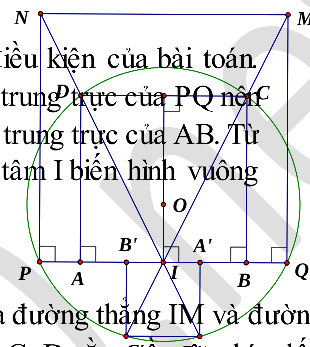
(d) cắt (O') thì bài toán có hai nghiệm hình.

(d) tiếp xúc với (O') thì bài toán có một nghiệm hình.

(d) và (O') không có giao điểm thì bài toán không có nghiệm hình.

Câu 5: Cho đường tròn (O) với dây cung PQ. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, B nằm trên đường thẳng PQ và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn.

LỜI GIẢI



Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa mãn điều kiện của bài toán. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì OI là đường trung trực của PQ nên cũng là đường trung trực của DC và do đó cũng là đường trung trực của AB. Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông PQMN thì có phép vị tự tâm I biến hình vuông PQMN thành hình vuông ABCD.

Cách dựng

Dựng hình vuông PQMN. Lấy giao điểm C và C' của đường thẳng IM và đường tròn, lấy giao điểm D và D' của IN và đường tròn(ta kí hiệu sao cho hai điểm C, D nằm về một phía đối với đường thẳng PQ). Gọi các điểm B, A, B', A' lần lượt là hình chiếu của các điểm C, D, C', D' trên đường thẳng PQ. Ta được các hình vuông ABCD và A'B'C'D' thỏa mãn điều kiện của bài toán.

DẠNG 4: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

PHƯƠNG PHÁP

Tìm một phép vị tự với tâm và tỉ số thích hợp.

Sử dụng các tính chất của phép vị tự để chứng minh tính chất mà bài toán yêu cầu.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi I, G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC.

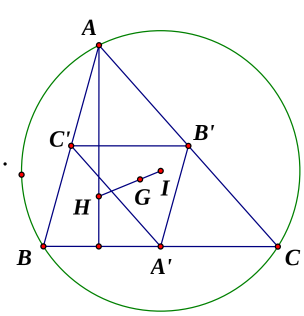
a) Chứng minh I là trực tâm của tam giác A'B'C'.

b) Tìm ảnh của A'B'C' qua phép vị tự tâm G tỉ số $k=-2$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$ (Như vậy khi ba điểm G, H, I không trùng nhau thì chúng nằm trên một đường thẳng, đường thẳng này gọi là đường thẳng Ơ – le).

d). Gọi I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. Chứng minh I' là trung điểm của IH.

LỜI GIẢI



a) Ta có $\begin{cases} IA'\perp BC \\ BC\parallel B'C' \end{cases}\Rightarrow IA'\perp B'C'$ (1).

Tương tự ta có $IB'\perp A'C'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là trực tâm của tam giác A'B'C'.

b) Ta có:

$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}\Rightarrow V_{(G;-2)}(A')=A$

$\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GB'}\Rightarrow V_{(G;-2)}(B')=B$

$\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC'}\Rightarrow V_{(G;-2)}(C')=C$

Vậy $\Delta ABC=V_{(G;-2)}(\Delta A'B'C')$

c) Theo câu b) $\Delta ABC=V_{(G;-2)}(\Delta A'B'C')$, mà I và H lần lượt là trực tâm của $\Delta A'B'C'$ và ΔABC, nên $V_{(G;-2)}(I)=H\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

d) Theo câu b) $\Delta ABC=V_{(G;-2)}(\Delta A'B'C')$, mà I' và I lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$ và ΔABC, nên $V_{(G;-2)}(I')=I\Rightarrow\overrightarrow{GI}=-2\overrightarrow{GI'}$.

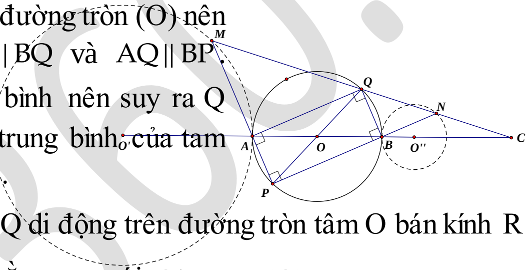
Mà $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}\Rightarrow\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}=-\overrightarrow{GI}\Rightarrow\overrightarrow{GH}-2\overrightarrow{GI'}=-\overrightarrow{GI}$

$\Rightarrow\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{GI'}=\overrightarrow{GI'}-\overrightarrow{GI}\Rightarrow\overrightarrow{I'H}=\overrightarrow{II'}\Rightarrow I'$ là trung điểm của IH.

Câu 2: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng của A qua B, PQ là một đường kính thay đổi của (O). Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M, N.
a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM; N là trung điểm của CQ.
b) Tìm quỹ tích của điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

LỜI GIẢI

a) Có AB và PQ là hai đường kính của đường tròn (O) nên APBQ là hình chữ nhật, do đó AP || BQ và AQ || BP. Trong ΔACM có BQ là đường trung bình nên suy ra Q trung điểm của MC, và BN là đường trung bình của tam giác ACQ suy ra N trung điểm của CQ.



b) Có $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CQ}\Leftrightarrow M=V_{(C;2)}(Q)$. Vì Q di động trên đường tròn tâm O bán kính R suy ra tập hợp điểm M nằm trên đường tròn tâm O' bán kính bằng 2R với $O'=V_{(C;2)}(O)$.

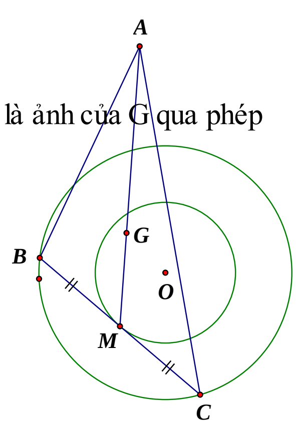
Có $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}\Leftrightarrow N=V_{\left(C;\frac{1}{2}\right)}(Q)$. Vì Q di động trên đường tròn tâm O bán kính R suy ra tập hợp điểm N nằm trên đường tròn tâm O'' bán kính bằng $\frac{R}{2}$ với $O''=V_{\left(C;\frac{1}{2}\right)}(O)$.

Câu 3: Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của $(O;R)$ có độ dài không đổi $BC=2$. Tìm tập hợp các điểm G sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

LỜI GIẢI

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow G$ là trọng tâm ΔABC.

Gọi M là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, suy ra M là ảnh của G qua phép vị tự V tâm A, tỉ số $k=\frac{3}{2}$.



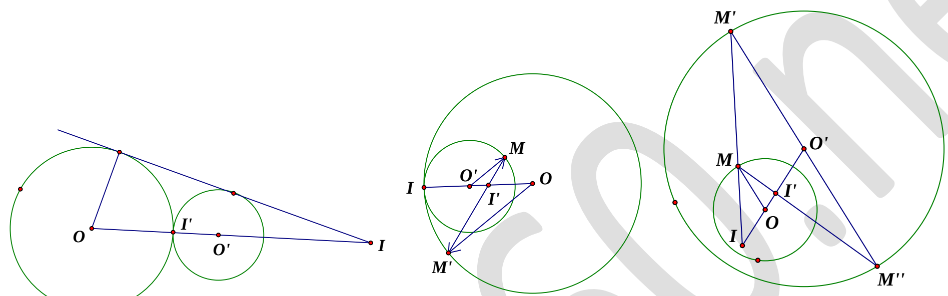
Vì $BC = 2$ không đổi nên $OM = \sqrt{R^2 - 1}$ (không đổi). Do đó tập hợp điểm M là đường tròn $(O;R')$ bán kính $R' = OM = \sqrt{R^2 - 1}$. Vậy tập hợp điểm G là đường tròn (I) là ảnh của đường tròn $(O;R')$ qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \frac{3}{2}$.

DẠNG 5: XÁC ĐỊNH TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:
a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài nhau.
b) Hai đường tròn tiếp xúc trong nhau.
c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

LỜI GIẢI

Gọi I là tâm vị tự ngoài và I' là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (O').



câu a) Câu b) Câu c)

a) Nếu (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm I' là tâm vị tự trong, giao điểm của OO' với tiếp tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') nếu có là tâm vị tự ngoài.
b) Nếu (O) và (O') tiếp xúc trong thì tiếp điểm I là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong I' là giao điểm của OO' và MM' trong đó $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ là hai vec tơ bán kính ngược hướng của (O) và (O').
c) Giả sử $(O;R)$ nằm trong $(O';R'), (R < R')$. Ta làm như sau:

Lấy điểm M bất kì thuộc (O).

Dựng đường thẳng qua O' song song với OM, cắt (O') tại M' và M'' (hai điểm M và M' cùng phía đối với đường thẳng OO').

Dựng $I = MM' \cap OO'$ và $I' = MM'' \cap OO'$.

Đặc biệt, khi O trùng O' thì I và I' trùng với O.