BÀI 6: KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I) ĐỊNH NGHĨA

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

II) TÍNH CHẤT

Nếu hình H_1 bằng hình H_2 và hình H_2 bằng hình H_3 thì hình H_1 bằng hình H_3

Câu 1: Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$. Hãy tìm ảnh của d qua việc thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$ và phép đối xứng tâm $I(2;-1)$.

LỜI GIẢI

Qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}=(1;2)$ điểm $M(x;y)\in d$ biến thành điểm $M'(x';y')$ sao cho

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Qua phép đối xứng tâm $I(2;-1)$ điểm $M'(x';y')$ biến thành điểm $M''(x'';y'')$, do đó có

$$\begin{cases} x''=2x_I-x' \\ y''=2y_I-y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''=4-x' \\ y''=-2-y' \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Từ (I) và (II) có $\begin{cases} x''=3-x \\ y''=-4-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-x'' \\ y=-4-y'' \end{cases}$

Do $M(x;y)\in d \Leftrightarrow 2x+y+3=0 \Leftrightarrow 2(3-x'')+(-4-y'')+3=0 \Leftrightarrow 2x''+y''-5=0$

Kết luận ảnh của d cần tìm có phương trình $2x+y-5=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $I(3;-2)$ và $A(4;5)$

a). Tìm ảnh của điểm A qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I tỉ số 3 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(2;-4)$

b). Tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x-4y+12=0$ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^0)}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;4)$.

LỜI GIẢI

a) Gọi A_1 là ảnh của A qua phép vị tự tâm $I(3;-2)$, tỉ số 3. Ta có:

$$\overrightarrow{IA_1}=3\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_1=3(x_A-x_1) \\ y_1-y_1=3(y_A-y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-3=3(4-3) \\ y_1+2=3(5+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=6 \\ y_1=19 \end{cases}$$

Gọi A’ là ảnh của A_1 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Ta có

$$\begin{cases} x'=x_1+2=6+2=8 \\ y'=y_1-4=19-4=15. \end{cases}$$

Vậy $A'(8;15)$ cũng là ảnh của A qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I, tỉ số 3 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(2;-4)$.

b) Ta có đường thẳng d đi qua các điểm $M(-4;0)$ và $N(0;3)$.

Qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$ thì M có ảnh là $M_1(0;-4)$ và N có ảnh là $N_1(-3;0)$. Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;4)$ thì M_1 có ảnh là $M'(2;0)$ và N_1 có ảnh là $N'(-1;4)$.

Ta có đường thẳng d' qua M' và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{M'N'}=(-3;4)$ nên

$$(d'):\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{4}\Leftrightarrow(d'):4x+3y-8=0$$

Vậy qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^0)}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;4)$ thì đường thẳng (d) có ảnh là $(d'):4x+3y-8=0$

Câu 3: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D, hình thang $A'B'C'D'$ vuông tại A' và D'. Chứng minh rằng hai hình thang ấy bằng nhau nếu $AB=A'B', BC=B'C'$ và $CD=C'D'$.

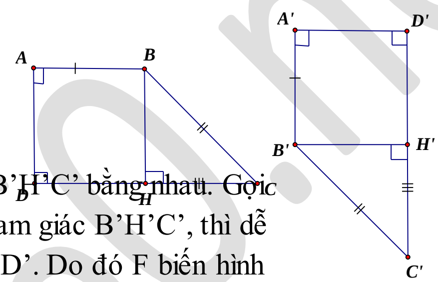
LỜI GIẢI

Nếu $AB=CD$ thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử $AB<CD$. Kẻ

$BH\perp CD, B'H'\perp C'D'$

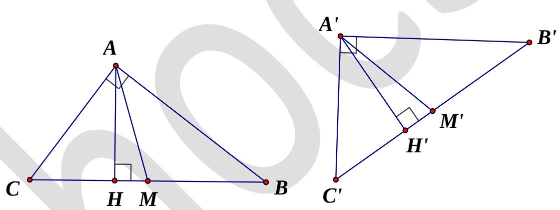
Ta có $CH=CD-AB=C'D'-A'B'=C'H'$.



Từ đó, suy ra hai tam giác vuông BHC và B'H'C' bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác BHC thành tam giác B'H'C', thì dễ thấy rằng F biến A thành A' và biến D thành D'. Do đó F biến hình thang ABCD thành hình thang A'B'C'D'. Vậy hai hình thang đó bằng nhau.

Câu 4: Chứng minh rằng hai tam giác vuông bằng nhau nếu co các cạnh huyền bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau.

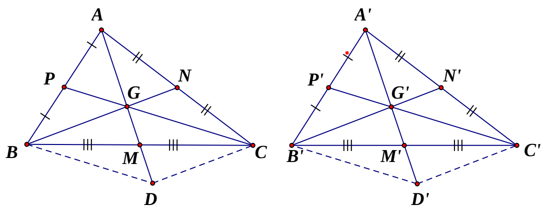
LỜI GIẢI



Cho hai tam giác ABC, A'B'C' vuông tại các đỉnh A, A'. Có $BC=B'C'$ và hai đường cao AH, A'H' bằng nhau. Gọi AM, A'M' là các đường trung tuyến thì $AM=A'M'$ và do đó hai tam giác vuông AHM và A'H'M' bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác AHM thành tam giác A'H'M' thì dễ thấy rằng F biến đoạn thẳng BC thành đoạn thẳng B'C' (hoặc thành đoạn thẳng C'B'). Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

Câu 5: Chứng minh rằng nếu ba trung tuyến của tam giác ABC lần lượt bằng ba trung tuyến của tam giác A'B'C' thì hai tam giác đó bằng nhau.

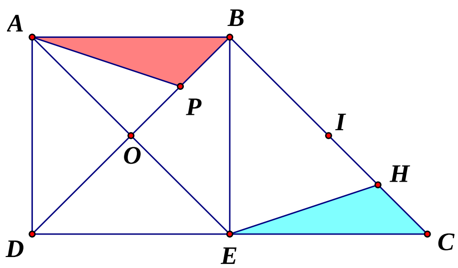
LỜI GIẢI



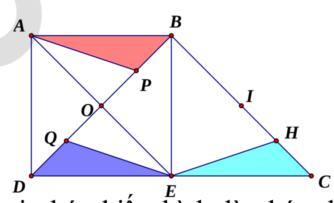
Giả sử tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G; tam giác A'B'C' có ba trung tuyến A'M', B'N', C'P' cắt nhau tại G' và $AM = A'M', BN = B'N', CP = C'P'$.

Ta lấy điểm D và D' sao cho BGCD và B'G'C'D' là những hình bình hành. Dễ thấy rằng hai tam giác GCD và G'C'D' bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình F biến G, C, D lần lượt thành các điểm G', C', D'. Rõ ràng khi đó F biến A thành A', B thành B' nên hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

Câu 6: Cho hình thang vuông ABCD như hình vẽ, trong đó $AB = AD = \frac{1}{2}DC$. Gọi E, I, O, P, H lần lượt là trung điểm của CD, BC, AE, BO, IC. Sử dụng phép dời hình chứng minh rằng hai tam giác ABP và ECH bằng nhau.



LỜI GIẢI



Gọi Q trung điểm của DO.

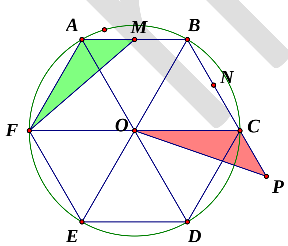
Có $E = Đ_O(A)$ và $E = Đ_{BE}(E)$

Có $D = Đ_O(B)$ và $C = Đ_{BE}(D)$

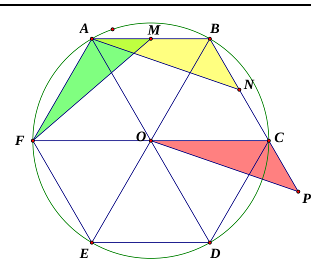
Có $Q = Đ_O(P)$ và $H = Đ_{BE}(Q)$

Suy ra phép dời hình được thực hiện liên tiếp bởi hai phép biến hình là phép đối xứng tâm O và phép đối xứng trục BE. Từ đó suy ra $\Delta ABP = \Delta ECH$.

Câu 7: Cho lục giác đều ABCDEF nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC, P là điểm đối xứng của N qua C. Dùng phép dời hình chứng minh $\Delta AFM = \Delta COP$



LỜI GIẢI



Có $Q_{(O;-60^0)}(F) = A$ và $T_{\overrightarrow{OD}}(A) = O$

Có $Q_{(O;-60^0)}(A) = B$ và $T_{\overrightarrow{OD}}(B) = C$

Có $Q_{\left(O;-60^0\right)}(M) = N$ và $T_{\overrightarrow{OD}}(N) = P$

Suy ra phép dời hình được thực hiện liên tiếp bởi hai phép biến hình là phép quay tâm O góc quay -60^0 và phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{OD}$. Từ đó suy ra $\Delta FAM = \Delta OCP$.