BÀI 5: PHÉP QUAY

A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM;OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Điểm O được gọi là tâm quay, α được gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

Nhận xét:

Phép quay tâm O góc quay $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, chính là phép đối xứng tâm O.

Phép quay tâm O góc quay $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, chính là phép đồng nhất.

II) TÍNH CHẤT

Phép quay

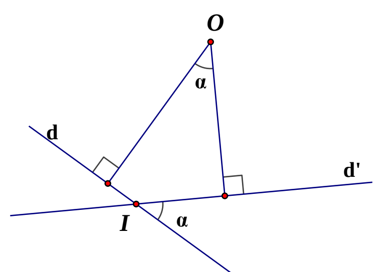
1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
3) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
4) Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý:

Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' (hình 2). Khi đó:

Nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α.

Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



hình 2

B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1: Xác định ảnh của một hình qua một phép quay

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

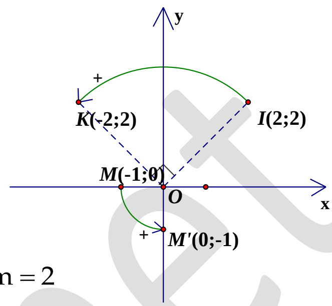
Dùng định nghĩa phép quay.

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

a). Viết phương trình d’ là ảnh của d qua phép $Q_{(O;90^0)}$.

b). Viết phương trình (C’) là ảnh của (C) qua phép $Q_{(O;90^0)}$.

LỜI GIẢI



a) Vì $d' = Q_{(O;90^0)}(d) \Rightarrow d' \perp d \Rightarrow$ phương trình d’ có dạng: $3x + 2y + m = 0$

Chọn $M(-1;0) \in d$. Gọi

$M' = Q_{(O;90^0)}(M) \Rightarrow M'(0;-1)$

Vì $M \in d \Rightarrow M'(0;-1) \in d' \Leftrightarrow 3.0 + 2.(-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy $d': 3x + 2y + 2 = 0$.

b) Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$ bán kính $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$

Cách 1:

Gọi $K(x;y) = Q_{(O;90^0)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} OK = OI \\ IOK = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OK = OI \\ OK^2 + OI^2 = KI^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 8 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 8 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \mp 2 \end{cases} \Rightarrow K(2;-2) \vee K(-2;2)$

Do góc quay bằng 90^0 có nghĩa quay theo chiều dương nên $K(-2;2)$

Gọi $(C') = Q_{(O;90^0)}(C) \Rightarrow (C')$ có tâm $K(-2;2)$ và bán kính $R' = R = 3$. Nên:

$(C'): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Cách 2:

Gọi $K(x';y') = Q_{(O;90^0)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2\cos 90^0 - 2\sin 90^0 + 0 \\ y' = 2\sin 90^0 + 2\cos 90^0 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow K(-2;2)$

Từ đó suy ra $(C'): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

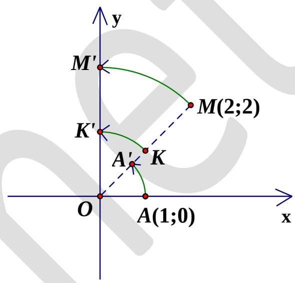
Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;2)$, đường thẳng $d: 2x-y-2=0$ và đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh của M, d, (C) qua:

a) Phép quay tâm O góc quay 45^0.

b) Phép quay tâm $I(1;2)$ góc quay 45^0.

LỜI GIẢI

a) **Tìm ảnh của M**



Gọi $M'(x';y')=Q_{(O;45^0)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM & (1) \\ MOM'=45^0 & (2) \end{cases}$

Giải (1): $x'^2+y'^2=8 \Leftrightarrow (x'+y')^2-2x'y'=8$ (1')

Giải (2): $MM'^2=OM^2+OM'^2-2OMOM'\cos 45^0$

$\Leftrightarrow (x'-2)^2+(y'-2)^2=x'^2+y'^2+8-2.\sqrt{8}.\sqrt{x'^2+y'^2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x'+y'=\sqrt{x'^2+y'^2} \Leftrightarrow x'+y'=2\sqrt{2}$ thay vào (1') được $x'y'=0$

Suy ra x', y' là nghiệm của phương trình $X^2-2\sqrt{2}X=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=0 \\ X=2\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x'=2\sqrt{2} \\ y'=0 \end{cases}$

Do góc quay bằng 45^0 có nghĩa quay theo chiều dương nên $M'(0;2\sqrt{2})$

Cách 2: $M'(x';y')=Q_{(O;45^0)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2\cos 45^0-2\sin 45^0+0 \\ y'=2\sin 45^0+2\cos 45^0+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'(0;2\sqrt{2})$

Tìm ảnh của đường thẳng d:

Dễ thấy $M(2;2)\in d$

Chọn điểm $A(1;0)\in d$. Tìm ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 45^0

Gọi $A'(x';y')=Q_{(O;45^0)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=1.\cos 45^0-0.\sin 45^0+0 \\ y'=1.\sin 45^0+0.\cos 45^0+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

Gọi d’ ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay 45^0, suy ra d’ đi qua hai điểm A’ và M’ do đó d’ có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'M'} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1;2)$. Phương trình đường thẳng $d': 2(x-0)+\left(y-2\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2\sqrt{2}=0$.

Tìm ảnh của đường tròn (C):

Đường tròn (C) có tâm $K(1;1)$ bán kính $R=2$

Tìm ảnh của K

Gọi $K'(x';y') = Q_{(O;45^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} OK' = OK & (1) \\ KOK' = 45^0 & (2) \end{cases}$

Giải (1): $x'^2 + y'^2 = 2 \Leftrightarrow (x'+y')^2 - 2x'y' = 2$ (1’)

Giải (2): $KK'^2 = OK^2 + OK'^2 - 2OK.OK'\cos 45^0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + (y'-1)^2 = x'^2 + y'^2 + 2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{x'^2+y'^2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x'+y' = \sqrt{x'^2+y'^2} \Leftrightarrow x'+y' = \sqrt{2}$ thay vào (1’) được $x'y'=0$

Suy ra x’, y’ là nghiệm của phương trình $X^2 - \sqrt{2}X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=0 \\ X=\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x'=\sqrt{2} \\ y'=0 \end{cases}$

Do góc quay bằng 45^0 có nghĩa quay theo chiều dương nên $K'\left(0;\sqrt{2}\right)$

Cách 2: $K'(x';y') = Q_{(O;45^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$

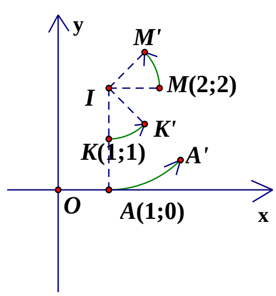
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1\cos 45^0 - 1\sin 45^0 + 0 \\ y' = 1\sin 45^0 + 1\cos 45^0 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow K'\left(0;\sqrt{2}\right)$

Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C’) có tâm $K'\left(0;\sqrt{2}\right)$ bán kính $R'=R=2$

Phương trình $(C'): x^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 4$.

b) **Tìm ảnh của M**

Gọi $M'(x';y') = Q_{(I;45^0)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ MIM' = 45^0 & (2) \end{cases}$



Giải (1): $(x'+2)^2+(y'+2)^2=32$

$\Leftrightarrow (x'+y')^2+4(x'+y')-2x'y'-24=0$ (1')

Giải (2): $MM'^2=IM^2+IM'^2-2IM.IM'\cos 45^0$

$\Leftrightarrow (x'-2)^2+(y'-2)^2=(x'+2)^2+(y'+2)^2+32-2.\sqrt{(x'+2)^2+(y'+2)^2}.\sqrt{32}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x'+y'=-4+4\sqrt{2}$ thay vào (1') được $x'y'=4-8\sqrt{2}$

Suy ra x', y' là nghiệm của phương trình $X^2-\left(-4+4\sqrt{2}\right)X+4-8\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-2 \\ X=4\sqrt{2}-2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=4\sqrt{2}-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x'=4\sqrt{2}-2 \\ y'=-2 \end{cases}$

Do góc quay bằng 45^0 có nghĩa quay theo chiều dương nên $M'\left(-2;4\sqrt{2}-2\right)$

Cách 2: $M'(x';y')=Q_{(I;45^0)}(M)\Leftrightarrow \begin{cases} x'=(x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha+a \\ y'=(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=4\cos 45^0-4\sin 45^0-2 \\ y'=4\sin 45^0+4\cos 45^0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=4\sqrt{2}-2 \end{cases} \Rightarrow M'\left(-2;4\sqrt{2}-2\right)$

Tìm ảnh của đường thẳng d:

Dễ thấy $M(2;2)\in d$

Chọn điểm $A(1;0)\in d$. Tìm ảnh của A qua phép quay tâm I góc quay 45^0

Gọi $A'(x';y')=Q_{(I;45^0)}(A)\Leftrightarrow \begin{cases} x'=(x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha+a \\ y'=(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=3.\cos 45^0-2.\sin 45^0-2 \\ y'=3.\sin 45^0+2.\cos 45^0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{-4+\sqrt{2}}{2} \\ y'=\dfrac{-4+5\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{-4+\sqrt{2}}{2};\dfrac{-4+5\sqrt{2}}{2}\right)$

Gọi d' ảnh của d qua phép quay tâm I góc quay 45^0, suy ra d' đi qua hai điểm A' và M' do đó d' có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'M'}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1;3)$. Phương trình đường thẳng $d':3(x+2)+\left(y+2-4\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y+8-4\sqrt{2}=0$.

Tìm ảnh của đường tròn (C):

Đường tròn (C) có tâm $K(1;1)$ bán kính $R=2$

Tìm ảnh của K

Gọi $K'(x';y') = Q_{(I;45^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} IK' = IK & (1) \\ \widehat{KIK'} = 45^0 & (2) \end{cases}$

Giải (1): $(x'+2)^2 + (y'+2)^2 = 18 \Leftrightarrow (x'+y')^2 + 4(x'+y') - 2x'y' - 10 = 0$ (1')

Giải (2): $KK'^2 = IK^2 + IK'^2 - 2IK.IK'\cos 45^0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + (y'-1)^2 = (x'+2)^2 + (y'+2)^2 + 18 - 2.\sqrt{(x'+2)^2 + (y'+2)^2}.\sqrt{18}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x'+y' = -4+3\sqrt{2}$ thay vào (1') được $x'y' = 4-6\sqrt{2}$

Suy ra x', y' là nghiệm của phương trình $X^2 - (-4+3\sqrt{2})X + 4 - 6\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -2+3\sqrt{2} \\ X = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -2+3\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x' = -2+3\sqrt{2} \\ y' = -2 \end{cases}$

Do góc quay bằng 45^0 có nghĩa quay theo chiều dương nên $K'(-2;-2+3\sqrt{2})$

Cách 2: $K'(x';y') = Q_{(I;45^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha + a \\ y' = (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3.\cos 45^0 - 2\sin 45^0 - 2 \\ y' = 3.\sin 45^0 + 3.\cos 45^0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -2+3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow K'(-2;-2+3\sqrt{2})$

Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C') có tâm $K'(-2;-2+3\sqrt{2})$ bán kính $R' = R = 2$.

Phương trình $(C'): (x+2)^2 + (y+2-3\sqrt{2})^2 = 4$.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(4;3)$ và đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$. Tìm ảnh của A, (C) qua phép quay tâm O góc quay -60^0

LỜI GIẢI

Tìm ảnh của A

Gọi $A'(x';y') = Q_{(O;-60^0)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} OA' = OA & (1) \\ \widehat{AOA'} = -60^0 & (2) \end{cases}$

Giải (1): $x'^2 + y'^2 = 25$ (1')

Giải (2): $AA'^2 = OA^2 + OA'^2 - 2OA.OA'\cos(-60^0)$

$\Leftrightarrow (x'-4)^2 + (y'-3)^2 = x'^2 + y'^2 + 25 - 2..\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{25}.\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 8x'+6y'=25 \Rightarrow y'=\dfrac{25-8x'}{6}$ thay vào (1') được: $x'^2+\left(\dfrac{25-8x'}{6}\right)^2=25$

$\Leftrightarrow 100x^2-400x-275=0 \Leftrightarrow 4x'^2-16x-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x'=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2} \\ x'=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2} \\ y'=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases} x'=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2} \\ y'=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Do góc quay bằng -60^0 có nghĩa quay theo chiều âm nên $A'\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$

Cách 2: $A'(x';y')=Q_{(O;-60^0)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=4\cos(-60^0)-3\sin(-60^0)+0 \\ y'=4\sin(-60^0)+3\cos(-60^0)+0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2} \\ y'=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$

Tìm ảnh của đường tròn (C):

Đường tròn (C) có tâm $K\left(2;2\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

Tìm ảnh của K

Gọi $K'(x';y')=Q_{(O;-60^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} OK'=OK & (1) \\ KOK'=60^0 & (2)\end{cases}$

Giải (1): $x'^2+y'^2=16$ (1')

Giải (2): $KK'^2=OK^2+OK'^2-2OK.OK'\cos 60^0$

$\Leftrightarrow (x'-2)^2+\left(y'-2\sqrt{3}\right)^2=x'^2+y'^2+16-2.\sqrt{16}.\sqrt{x'^2+y'^2}.\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4x'-4\sqrt{3}y'=-16 \Leftrightarrow x'+\sqrt{3}y'=4 \Rightarrow x'=4-\sqrt{3}y'$ thay vào (1') được:

$\left(4-\sqrt{3}y'\right)^2+y'^2=16 \Leftrightarrow y'^2-2\sqrt{3}y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y'=0 \\ y'=2\sqrt{3}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=0\end{cases} \vee \begin{cases} x'=-2 \\ y'=2\sqrt{3}\end{cases}$

Do góc quay bằng -60^0 có nghĩa quay theo chiều âm nên $K'(4;0)$

Cách 2: $K'(x';y')=Q_{(O;-60^0)}(K) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2\cos(-60^0)-2\sqrt{3}\sin(-60^0)+0 \\ y'=2\sin(-60^0)+2\sqrt{3}\cos(-60^0)+0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=0\end{cases} \Rightarrow K'(4;0)$

Ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C’) có tâm $K'(4;0)$ bán kính $R'=R=\sqrt{5}$

Phương trình $(C'):(x-4)^2+y^2=5$.

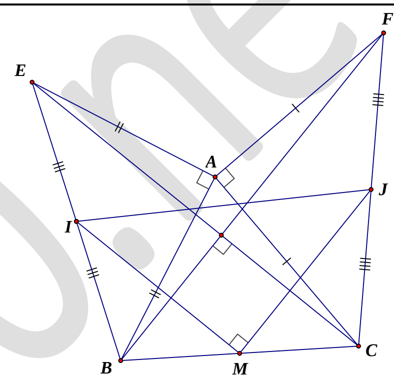
DẠNG 2: Sử dụng phép quay để chứng minh một số bài toán hình học.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chọn tâm quay và góc quay thích hợp rồi sử dụng tính chất phép quay.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M, J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC, CF. Chứng minh tam giác IMJ vuông cân.

LỜI GIẢI



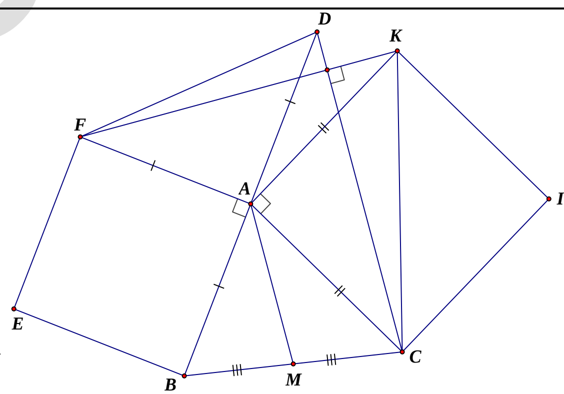
Có $B=Q_{(A,90^0)}(E)$,

$F=Q_{(A,90^0)}(C)\Rightarrow EC=BF$ và $EC\perp BF$.

Có $\begin{cases}2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CE}\\ 2\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{BF}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MI=MJ\\ MI\perp MJ\end{cases}\Rightarrow\Delta MIJ$ vuông cân tại M.

Câu 2: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác đó các hình vuông ABEF và ACIK. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với FK và $AM=\frac{1}{2}FK$.

LỜI GIẢI



Gọi $D=Q_{(A,180^0)}(B)$.

Có $F=Q_{(A,90^0)}(D)$ và

$K=Q_{(A,90^0)}(C)$ nên

$FK=DC, FK\perp DC$ (1).

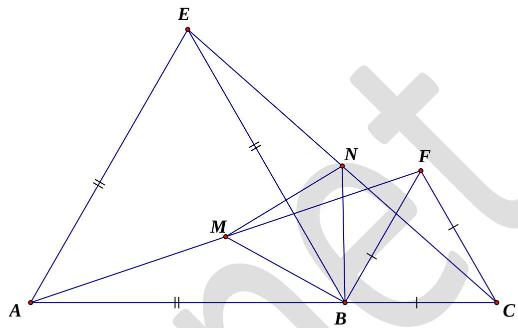
Có AM là đường trung bình của

$\Delta BCD\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AM\perp FK$ và $AM=\frac{1}{2}FK$.

Câu 3: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng AB, BC làm cạnh, dựng các tam giác đều ABE và BCF nằm cùng về một phía so với đường thẳng AB. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh tam giác BMN đều.

LỜI GIẢI

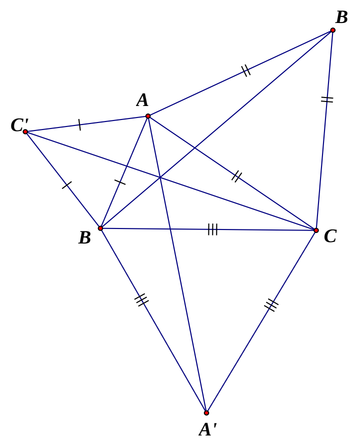


Gọi $Q_{\left(B,60^0\right)}$ là phép quay tâm B góc quay 60^0. $Q_{\left(B,60^0\right)}$ biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F nên $Q_{\left(B,60^0\right)}$ biến đường thẳng EC thành đường thẳng AF. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^0.

$Q_{\left(B,60^0\right)}$ cũng biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF nên $BN = BM$ và $\left(BN, BM\right) = 60^0$, do đó tam giác BMN đều.

Câu 4: Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh của tam giác đó làm cạnh, dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác đều ABC', CAB', BCA'. Chứng minh rằng:
a). Ba đoạn thẳng AA', BB', CC' bằng nhau.
b). Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng qui.

LỜI GIẢI



Gọi $Q_{\left(A,60^0\right)}$ là phép quay tâm A góc quay 60^0. $Q_{\left(A,60^0\right)}$ biến các điểm C', C lần lượt thành các điểm B, B' nên $Q_{\left(A,60^0\right)}$ biến đường thẳng C'C thành đường thẳng BB'. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $CC' = BB'$ (1).

Gọi $Q_{\left(B,60^0\right)}$ là phép quay tâm B góc quay 60^0. $Q_{\left(B,60^0\right)}$ biến các điểm A, A' lần lượt thành các điểm C', C nên $Q_{\left(B,60^0\right)}$ biến đường thẳng AA' thành đường thẳng CC'. Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $AA' = CC'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AA' = BB' = CC'$.

Gọi $I = AA' \cap CC' \Rightarrow \left(AA';CC'\right) = 60^0 \Leftrightarrow AIC' = 60^0$.

Lấy trên CC' điểm E sao cho $IE = IA$, có $AIE = 60^0 \Rightarrow \Delta AIE$ đều.

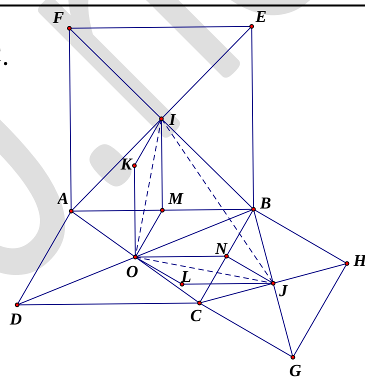
Xét: $B = Q_{\left(A;60^0\right)}(C');\ I = Q_{\left(A;60^0\right)}(E);\ B' = Q_{\left(A;60^0\right)}(C)$.

Vì C, E, C' thẳng hàng nên suy ra ba điểm B, I ,B' thẳng hàng.

Kết luận 3 đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm I.

Câu 5: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Dựng bên ngoài ABCD các hình vuông ABEF và BCGH. Gọi I và J lần lượt là tâm của hai hình vuông trên. Chứng minh tam giác IOJ vuông cân.

LỜI GIẢI



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Dựng các hình bình hành OMIK và ONJL.

Ta có $\begin{cases} MI \perp MB \\ MI = MB \\ ON \parallel MB \\ ON = MB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ON \perp MI \\ ON = MI \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} OK \parallel MI \\ OK = MI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ON \perp OK \\ ON = OK \end{cases}$.

Tương tự chứng minh được $\begin{cases} OL \perp OM \\ OL = OM \end{cases}$

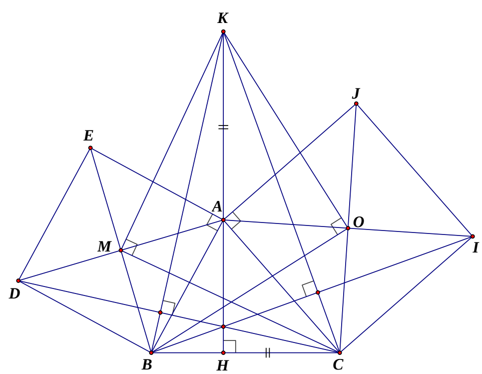
Xét phép quay $Q_{\left(O;90^0\right)}$ biến hình bình hành OLJN thành hình bình hành OMIK và

$Q_{\left(O;90^0\right)}(J) = I \Rightarrow \begin{cases} OI \perp OJ \\ OI = OJ \end{cases} \Rightarrow \Delta OIJ$ vuông cân tại O.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACIJ sao cho C và D nằm khác phía với AB. Chứng minh giao điểm của BI và CD nằm trên đường cao AH của tam giác ABC.

LỜI GIẢI

Gọi M, O lần lượt là tâm của hai hình vuông ABDE và ACIJ. Trên tia đối của tia AH dựng $AK = BC$, gọi $Q_{\left(M,90^0\right)}$ là phép quay tâm M góc quay 90^0, gọi $Q_{\left(O,90^0\right)}$ là phép quay tâm O góc quay 90^0



- Có $C = Q_{(O,90^0)}(A)$,

$\begin{cases} AK \perp BC \\ AK = BC \end{cases} \Rightarrow BC = Q_{(O,90^0)}(KA) \Rightarrow B = Q_{(O,90^0)}(K)$.

Ngoài ra $I = Q_{(O,90^0)}(C)$. Từ đó suy ra BI là ảnh của KC qua phép quay tâm O góc quay 90^0 nên $BI \perp KC$ (1).

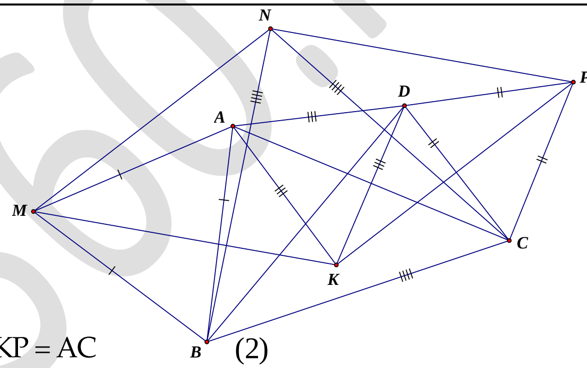
- Có $B = Q_{(M,-90^0)}(A)$, $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK = BC \end{cases} \Rightarrow BC = Q_{(M,-90^0)}(KA) \Rightarrow C = Q_{(M,-90^0)}(K)$.

Ngoài ra $D = Q_{(M,-90^0)}(B)$. Từ đó suy ra CD là ảnh của KB qua phép quay tâm O góc quay 90^0 nên $CD \perp KB$ (2).

Gọi $P = BI \cap CD \Rightarrow$ P là trực tâm của tam giác KBC hay $P \in KH \Leftrightarrow P \in AH$.

Câu 7: Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABM và CDP. Về phía trong tứ giác, dựng hai tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh MNPK là hình bình hành.

LỜI GIẢI



Xét phép quay tâm B góc quay 60^0, biến hai điểm A và C thành hai điểm M và N. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên $MN = AC$ (1)

Xét phép quay tâm D góc quay 60^0, biến hai điểm A và C thành hai điểm K và P. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên $KP = AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN = KP$ $(*)$.

Xét phép quay tâm A góc quay -60^0, biến hai điểm B và D thành hai điểm M và K. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên $MK = BD$ (3)

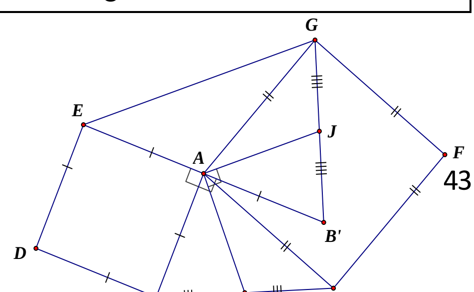
Xét phép quay tâm C góc quay -60^0, biến hai điểm B và D thành hai điểm N và P. Do phép quay bảo toàn khoảng cách nên $NP = BD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MK = NP$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra tứ giác MNPK là hình bình hành.

Câu 8: Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Gọi H trung điểm của BC. Chứng minh $EG = 2AH$.

LỜI GIẢI



Gọi $B' = Q_{(A;90^0)}(B) \Rightarrow \begin{cases} AB' = AB \\ (AB, AB') = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AB' = AB = AE \\ EAB' = 180^0 \end{cases}$

$\Rightarrow E, A, B'$ thẳng hàng và A trung điểm của EB’ (1).

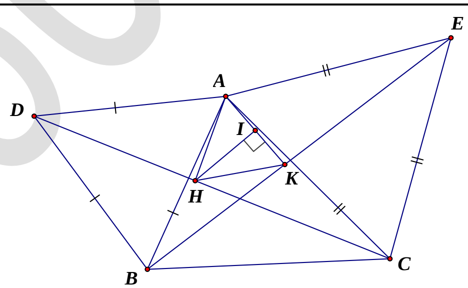
Lại có $\begin{cases} AG = AC \\ (AC, AG) = 90^0 \end{cases} \Rightarrow G = Q_{(A;90^0)}(C)$

Gọi $J = Q_{(A;90^0)}(H) \Rightarrow$ $AJ = AH$ và J là trung điểm của B’G (Vì H trung điểm của BC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra AJ là đường trung bình của $\Delta B'EG \Rightarrow EG = 2AJ = 2AH$

Câu 9: Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi K và H lần lượt là chân các đường phân giác trong của các tam giác ABE và ACE. Gọi I trung điểm của AK. Chứng minh $HI \perp AK$.

LỜI GIẢI



Ta có ΔABD đều

$\Rightarrow \begin{cases} AB = AD \\ (AB, AD) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow B = Q_{(A;60^0)}(D)$

Ta có ΔACE đều

$\Rightarrow \begin{cases} AE = AC \\ (AE, AC) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow E = Q_{(A;60^0)}(C)$

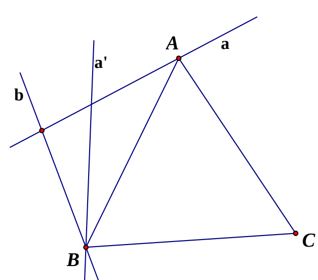
Suy ra $\Delta ABE = Q_{(A;60^0)}(\Delta ADC) \Rightarrow AK = Q_{(A;60^0)}(AH)$

Suy ra $K = Q_{(A;60^0)}(H) \Rightarrow \begin{cases} AK = AH \\ (AK, AH) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta AHK$ đều.

Suy ra $HI \perp AK$ (trong tam giác đều đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Câu 10: Cho hai đường thẳng a, b và điểm C không thuộc a, b. Hãy tìm trên a và b lần lượt hai điểm A và B sao cho tam giác ABC đều.

LỜI GIẢI

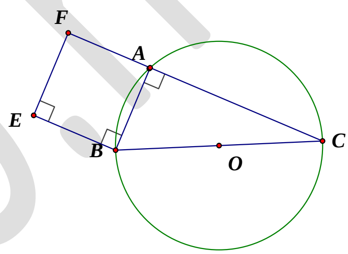


Nếu xem B là ảnh của A qua phép quay tâm C góc quay 60^0 thì B sẽ là giao điểm của đường thẳng b và đường thẳng a' là ảnh của a qua phép quay nói trên.

Số nghiệm của bài toán tùy thuộc vào số giao điểm của đường thẳng b với đường thẳng a'.

Câu 11: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh E chạy trên nữa đường tròn cố định.

LỜI GIẢI



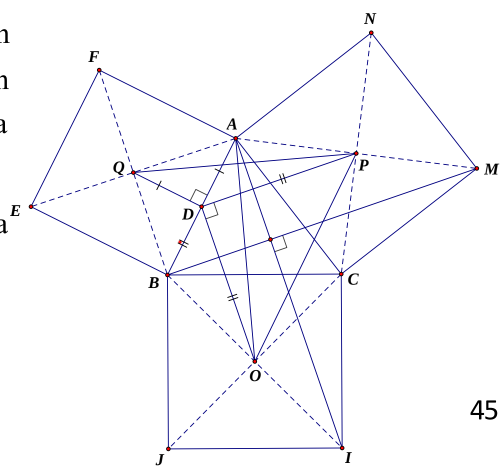
E là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay 90^0. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O) thì E chạy trên nữa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B góc quay 90^0.

Câu 12: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P , Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân tại đỉnh D.

b) Chứng minh AO vuông góc với PQ và $AO = PQ$.

LỜI GIẢI



a) Phép quay tâm C góc quay 90^0, biến điểm I thành điểm B, biến điểm A thành điểm M. Theo tính chất phép quay suy ra $IA \perp BM \,\&\, IA = BM$ (1).

Có DO là đường trung bình của $\Delta ABI \Rightarrow \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ (2).

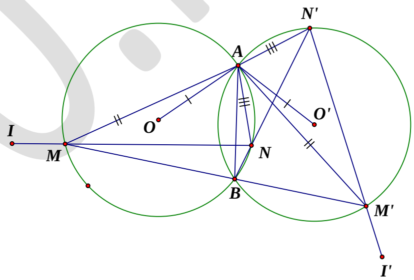
Có DP là đường trung bình của $\Delta ABM \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $DO \perp DP \,\&\, DO = DP \Rightarrow \Delta DOP$ vuông cân tại D.

b) Phép quay tâm D góc quay 90^0, biến điểm Q thành điểm A, biến điểm P thành điểm O. Theo tính chất phép quay suy ra $QP \perp OA \,\&\, QP = OA$.

Câu 13: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau ở A và B. Từ điểm I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O), MB và NB cắt (O') tại M' và N'. Chứng minh đường thẳng M'N' luôn đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI



Xét phép quay Q tâm A góc quay $(AO;AO')$ biến O thành O'. Vì MM' và NN' qua B nên

$(AO;AO') = (AM;AM') = (AN;AN')$.

Phép quay Q biến điểm M thành điểm M'; N biến thành N'. Từ đó biến đường thẳng MN thành đường thẳng M'N'. Đường thẳng MN qua điểm I cố định nên đường thẳng M'N' qua điểm I' cố định là ảnh của I qua phép quay Q nói trên.