PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP VỚI SIN VÀ COSIN

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

+ Là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó luỹ thừa của sinx và cosx cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\cos^k x \neq 0$ (k là số mũ cao nhất) ta được phương trình ẩn là $\tan x$.

Phương trình đẳng cấp bậc hai: a $\sin^2 x$ + b $\sin x.\cos x$ + c $\cos^2 x$ = d (1)

Cách 1:

- Kiểm tra cosx = 0 có thoả mãn (1) hay không?

  Lưu ý: cosx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

  $$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: t = tanx, đưa về phương trình bậc hai theo t:

  $$(a-d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

$\Leftrightarrow b.\sin 2x + (c-a).\cos 2x = 2d - a - c$ (đây là PT bậc nhất đối với sin2x và cos2x)

B– BÀI TẬP

Câu 1: Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ thỏa phương trình $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

TH2: $\cos x \neq 0,$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = \frac{6}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = 6\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{3}\tan x = 14 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi.$

Câu 2: Phương trình $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=0$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$ $\left(\text{vôùi}\tan\alpha=-2+\sqrt{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$ $\left(\text{vôùi}\tan\alpha=2-\sqrt{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$ $\left(\text{vôùi}\tan\alpha=-1+\sqrt{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$ $\left(\text{vôùi}\tan\alpha=1-\sqrt{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

TH1: $\cos x=0\Leftrightarrow\sin^2 x=1$ không thỏa phương trình.

TH2: $\cos x\neq 0,$ chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+\sqrt{3}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)+k\pi\end{array}\right.$$

Câu 3: Giải phương trình $3\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x-4\cos^2 2x=2.$

A. $x=\dfrac{1}{2}\arctan 3+\dfrac{k\pi}{2}, x=\dfrac{1}{2}\arctan(-2)+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

B. $x=\arctan\dfrac{1+\sqrt{73}}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, x=\arctan\dfrac{1-\sqrt{73}}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1+\sqrt{73}}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, x=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1-\sqrt{73}}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

D. $x=\arctan\dfrac{3}{2}+\dfrac{k\pi}{2}, x=\arctan(-1)+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TH1: $\cos 2x=0\Leftrightarrow\sin^2 2x=1$ không thỏa phương trình.

TH2: $\cos 2x\neq 0,$ chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 2x$ ta được:

$$3\tan^2 2x-2\tan 2x-4=\frac{2}{\cos^2 2x}\Leftrightarrow 3\tan^2 2x-2\tan 2x-4=2\left(1+\tan^2 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan^2 2x-\tan 2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 2x=3\\ \tan 2x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\arctan 3+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\arctan(-2)+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.$$

Câu 4: Phương trình $2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0$ có nghiệm là:

A. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

B. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

D. $-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ không thỏa phương trình.

TH2: $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x + \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Câu 5: Một họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$ là

A. $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta

$$2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = -2\left(1 + \tan^2 x\right) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$$

được $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\pi \end{array}\right.$

Câu 6: Một họ nghiệm của phương trình $2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x\cos x = 3 + \sqrt{3}$ là

A. $\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$, v$k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x\cos x = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1 + \cos 2x\right) + 3\sin 2x = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

Câu 7: Một họ nghiệm của phương trình $-3\sin x\cos x + \sin^2 x = 2$ là

A. $\arctan(-2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\arctan(-2) + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $-\dfrac{1}{2}\arctan(-2) + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\arctan(2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được $-3\tan x + \tan^2 x = 2\left(1 + \tan^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x+3\tan x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan(-2)+k\pi\end{array}\right.$$

Câu 8: Một họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$ là

A. $\arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
B. $-\arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
C. $\arctan\left(\dfrac{3}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
D. $-\arctan\left(\dfrac{3}{2}\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ không là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\tan^2 x+\tan x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$$

Câu 9: Một họ nghiệm của phương trình $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$ là

A. $-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
B. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
C. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
D. $\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ không là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$3\tan^2 x-4\tan x+5=2\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan^2 x-4\tan x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan 3+k\pi\end{array}\right.$$

Câu 10: Phương trình : $\sin^2 x-(\sqrt{3}+1)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$ có họ nghiệm là

A. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
B. $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
C. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
D. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ không là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$\tan^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\tan x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$$

Câu 11: Phương trình $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x\cos 4x$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

TH1: $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 4x = 1$ không thỏa phương trình.

TH2: $\cos 4x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 4x$ ta được

$$3 + 5\tan^2 4x = \frac{2}{\cos^2 4x} - 2\sqrt{3}\tan 4x \Leftrightarrow 3 + 5\tan^2 4x = 2\left(1 + \tan^2 4x\right) - 2\sqrt{3}\tan 4x$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 4x + 2\sqrt{3}\tan 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$$

Câu 12: Trong khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $\sin^2 4x + 3.\sin 4x.\cos 4x - 4.\cos^2 4x = 0$ có:

A. Ba nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Bốn nghiệm.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Nhận thấy $\cos 4x = 0$ không là nghiệm phương trình, chia hai vế phương trình cho $\cos 4x$, ta được phương t:

$$\tan^2 4x + 3.\tan 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan 4x = 1\\ \tan 4x = -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\\ x = \frac{1}{4}\arctan(-4) + \frac{k\pi}{4}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Do $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; \frac{1}{4}\arctan(-4) + \frac{\pi}{4}; \frac{1}{4}\arctan(-4) + \frac{\pi}{2}\right\}$

Câu 13: Phương trình $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$ có họ nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: là nghiệm của phương trình

$\cos x \neq 0$: Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2 - 6\sqrt{3}\tan x - 4\tan^2 x = -4\left(1 + \tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Câu 14: Phương trình $2\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$ (với $k \in \mathbb{Z}$) có nghiệm là:

A. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \arctan(\frac{1}{2}) + k2\pi$.

B. $\frac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $\frac{\pi}{4}+k\pi, \arctan(\frac{1}{2})+k\pi$. **D.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi, \arctan(\frac{1}{2})+k\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Khi $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$: $VT=2\neq VP=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (l)$

Khi $\cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$: $2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x+\tan x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=acr\tan\left(\frac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 15: Giải phương trình $\cos^3 x+\sin^3 x=2\left(\cos^5 x+\sin^5 x\right)$

A. $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\frac{1}{2}\pi$ **C.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\frac{1}{3}\pi$ **D.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

vì $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình nên ta có

$1+\tan^2 x+\tan^3 x(1+\tan^2 x)=2\left(1+\tan^5 x\right)$

$\Leftrightarrow \tan^5 x-\tan^3 x-\tan^2 x+1=0 \Leftrightarrow (\tan^2 x-1)(\tan^3 x-1)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$.

$$\cos^3 x+\sin^3 x=2\left(\cos^5 x+\sin^5 x\right)\Leftrightarrow 2\cos^5 x-\cos^3 x=2\sin^5 x-\sin^3 x$$

Cách khác: $\Leftrightarrow \cos^3 x\left(2\cos^2 x-1\right)=\sin^3 x\left(2\sin^2 x-1\right)\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$$

Câu 16: Giải phương trình $\sin^2 x+3\tan x=\cos x\left(4\sin x-\cos x\right)$

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=\arctan\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+k2\pi$ **B.** $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{1}{2}\pi, x=\arctan\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+k\frac{1}{2}\pi$

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi, x=\arctan\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+k\frac{2}{3}\pi$ **D.** $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\arctan\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x+\tan x(1+\tan^2 x)=4\tan x-1$

$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x+2\tan x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\arctan\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi$.

Câu 17: Giải phương trình $\sin^2 x\left(\tan x+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{1}{2}\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2}{3}\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2}{3}\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình đã cho tương đương với

$\tan^2 x(\tan x+1)=3\tan x(1-\tan x)+3(1+\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Câu 18: Giải phương trình $4\sin^3 x+3\cos^3 x-3\sin x-\sin^2 x\cos x=0$

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{1}{2}\pi,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{1}{2}\pi$

C. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{1}{3}\pi,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{1}{3}\pi$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình

Nên phương trình $\Leftrightarrow 4\tan^3 x+3-3\tan x(1+\tan^2 x)-\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=1 \\ \tan x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

Câu 19: Giải phương trình $2\cos^3 x=\sin 3x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\arctan(-2)+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\arctan(-2)+k\dfrac{1}{2}\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x=\arctan(-2)+k\dfrac{2}{3}\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2}{3}\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\arctan(-2)+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^3 x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\Leftrightarrow 2=3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x \Leftrightarrow \tan^3 x-3\tan x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-2 \\ \tan x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arctan(-2)+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

Câu 20: Giải phương trình $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\dfrac{1}{2}\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=k\dfrac{2}{3}\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2}{3}\pi \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \tan x=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$.

Câu 21: Giải phương trình $2\cos^2 x+6\sin x\cos x+6\sin^2 x=1$

A. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi; x=\arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right)+k2\pi$ **B.** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2}{3}\pi; x=\arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right)+k\dfrac{2}{3}\pi$

C. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{1}{4}\pi; x=\arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right)+k\dfrac{1}{4}\pi$ **D.** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right)+k\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 5\sin^2 x+6\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

Giải ra ta được $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right)+k\pi$.

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VÀ DẠNG ĐỐI XỨNG VỚI SIN VÀ COSIN

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

Dạng 1: Là phương trình có dạng:

$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ (3)

Để giải phương trình trên ta sử dụng phép đặt ẩn phụ

Đặt: $t=\cos x+\sin x=\sqrt{2}.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\ |t|\le\sqrt{2}.$

$\Rightarrow t^2=1+2\sin x.\cos x\ \Rightarrow\ \sin x.\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1).$

Thay và (3) ta được phương trình bậc hai theo t.

Ngoài ra chúng ta còn gặp phương trình phản đối xứng có dạng $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ (3')

Để giải phương trình này ta cũng đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\end{cases}$

Thay vào (3') ta có được phương trình bậc hai theo t.

Lưu ý:

- $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Dạng 2: a.|sinx ± cosx| + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t=|\cos x\pm\sin x|=\sqrt{2}.\left|\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)\right|;\ Ñk: 0\le t\le\sqrt{2}.$

  $\Rightarrow\ \sin x.\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$
- Tương tự dạng trên. Khi tìm *x* cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

B– BÀI TẬP

Câu 1: Phương trình $\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\\ x=k\frac{\pi}{4}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+k\pi\\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $\sin x+\cos x=t,\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow 1+\sin 2x=t^2\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$

Ta có phương trình $t=1-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1(TM)\\ t=-3(KTM)\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Câu 2: Phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{2}+k\pi\\ x=(2k+1)\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=1-\sin x\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow 1+\sin 2x=t^2\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Ta có phương trình $t^3-3t\left(\frac{t^2-1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow t^3-t^2-3t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1(TM)\\ t^2=3(KTM)\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Câu 3: Giải phương trình $2\sin 2x-(\sin x+\cos x)+1=0$

A. $x=k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k\pi$

B. $x=k\frac{1}{3}\pi, x=\frac{\pi}{2}+k\frac{1}{3}\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k\frac{1}{3}\pi$

C. $x=k\frac{2}{3}\pi, x=\frac{\pi}{2}+k\frac{2}{3}\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k\frac{2}{3}\pi$

D. $x=k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

Ta có : $2(t^2-1)-t+1=0\Leftrightarrow 2t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=1,t=-\frac{1}{2}$

- $t=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=k2\pi,x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$
- $t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi$

Câu 4: Giải phương trình $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,x=-\pi+k2\pi$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\pi+k\frac{2}{3}\pi$

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\frac{1}{3}\pi,x=-\pi+k\frac{2}{3}\pi$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\pi+k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=1-t^2\end{cases}$

Ta có: $1-t^2+12t+12=0\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\pi+k2\pi$.

Câu 5: Giải phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{\pi}{2}+k\pi,x=\pi+k2\pi$ **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{1}{2}\pi,x=\frac{\pi}{2}+k\frac{1}{2}\pi,x=\pi+k\frac{1}{2}\pi$

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi,x=\frac{\pi}{2}+k\frac{2}{3}\pi,x=\pi+k2\pi$ **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=\pi+k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x-\cos x\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=1-t^2\end{cases}$

Ta có: $1-t^2+t=1\Leftrightarrow t=0,t=1$

Từ đó ta tìm được: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=\pi+k2\pi$

Câu 6: Giải phương trình $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x$

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{11\pi}{12}+k\pi,x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$

B. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi,x=\frac{11\pi}{12}+k\frac{2}{3}\pi,x=-\frac{5\pi}{12}+k\frac{2}{3}\pi$

C. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,x=\frac{11\pi}{12}+k\frac{1}{4}\pi,x=-\frac{5\pi}{12}+k2\pi$

D. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi x=, x=-\frac{5\pi}{12}+k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Điều kiên: $\cos x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 2x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

Ta có: $t=\sqrt{2}\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}, t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Từ đó tìm được: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi x=, x=-\frac{5\pi}{12}+k2\pi$

Câu 7: Giải phương trình $|\cos x-\sin x|+2\sin 2x=1$

A. $x=\frac{k3\pi}{2}$ **B.** $x=\frac{k5\pi}{2}$ **C.** $x=\frac{k7\pi}{2}$ **D.** $x=\frac{k\pi}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đặt $t=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=1-t^2\\ 0\le t\le\sqrt{2}\end{cases}$

Ta có: $t+2(1-t^2)=1\Leftrightarrow 2t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$

Câu 8: Giải phương trình $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x$

A. $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, x=k\pi$

B. $x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, x=k\pi$

C. $x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{1}{3}\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k\frac{2}{3}\pi, x=k2\pi$

D. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x-\cos x+\sin x\right)=0$

Từ đó ta tìm được: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi$

Câu 9: Giải phương trình $\cos^3 x+\sin^3 x=2\sin 2x+\sin x+\cos x$

A. $x=\frac{k3\pi}{2}$ **B.** $x=\frac{k5\pi}{2}$ **C.** $x=k\pi$ **D.** $x=\frac{k\pi}{2}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=2\sin 2x+\sin x+\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

Ta có: $t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=2(t^2-1)+t\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$

Câu 10: Giải phương trình $\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{10}{3}$

A. $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2+\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}+k2\pi$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2+\sqrt{19}}{\sqrt{2}}+k2\pi$

C. $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2+\sqrt{19}}{\sqrt{2}}+k\pi$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}+k2\pi$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\dfrac{10}{3}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

Ta có: $t+\dfrac{2t}{t^2-1}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3t(t^2-1)+6t=10(t^2-1)\quad (t\ne\pm1)$

$\Leftrightarrow 3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t-5)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}+k2\pi$

Câu 11: Cho phương trình $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$, trong đó m là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là

A. $-2\le m\le -\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\le m\le 1$. **C.** $1\le m\le\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\le m\le 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow 1+\sin 2x=t^2\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Ta có phương trình $\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)-t+m=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}(1)$.

Phương trình có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$

Xét hàm số $y=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}$ trên $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
y	$-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

Từ BBT suy ra $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\le m\le 1$

Câu 12: Phương trình $2\sin 2x-3\sqrt{6}|\sin x+\cos x|+8=0$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=5\pi+k\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|, \left(0\le t\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow 1+\sin 2x=t^2\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Ta có $2\left(t^2-1\right)-3\sqrt{6}t+8=0\Leftrightarrow 2t^2-3\sqrt{6}t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{6}\,(KTM) \\ t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,(TM) \end{array}\right.$.

$$t=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right..$$