

## PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VÀ DẠNG ĐỐI XỨNG VỚI SIN VÀ COSIN

### A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

**Dạng 1:** Là phương trình có dạng:

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0 \quad (3)$$

Để giải phương trình trên ta sử dụng phép đặt ẩn phụ

$$\text{Đặt: } t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

Thay vào (3) ta được phương trình bậc hai theo t.

Ngoài ra chúng ta còn gặp phương trình phản đối xứng có dạng  $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$  (3')

$$\text{Để giải phương trình này ta cũng đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \\ \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2} \end{cases}$$

Thay vào (3') ta có được phương trình bậc hai theo t.

**Lưu ý:**

- $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

- $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

**Dạng 2:**  $a \cdot |\sin x \pm \cos x| + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c = 0$

- Đặt:  $t = |\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2} \cdot \left| \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right) \right|$ ;  $\forall k: 0 \leq t \leq \sqrt{2}$ .

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

### B- BÀI TẬP

**Câu 1:** Phương trình  $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  có nghiệm là:

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k \frac{\pi}{4} \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k \frac{\pi}{2} \end{cases}$

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k\pi \end{cases}$

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k2\pi \end{cases}$

**Câu 2:** Phương trình  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  có nghiệm là:

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 3:** Giải phương trình  $2\sin 2x - (\sin x + \cos x) + 1 = 0$

A.  $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  hoặc  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k\pi$

B.  $x = k\frac{1}{3}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{3}\pi$  hoặc  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k\frac{1}{3}\pi$

C.  $x = k\frac{2}{3}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi$  hoặc  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k\frac{2}{3}\pi$

D.  $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  hoặc  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$

**Câu 4:** Giải phương trình  $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\pi + k2\pi$

B.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\pi + k\frac{2}{3}\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{3}\pi, x = -\pi + k\frac{2}{3}\pi$

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\pi + k2\pi$

**Câu 5:** Giải phương trình  $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi$

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi, x = \pi + k\frac{1}{2}\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi, x = \pi + k2\pi$

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$

**Câu 6:** Giải phương trình  $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = \frac{11\pi}{12} + k\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k\frac{2}{3}\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{11\pi}{12} + k\frac{1}{4}\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$

**Câu 7:** Giải phương trình  $|\cos x - \sin x| + 2\sin 2x = 1$

A.  $x = \frac{k3\pi}{2}$

B.  $x = \frac{k5\pi}{2}$

C.  $x = \frac{k7\pi}{2}$

D.  $x = \frac{k\pi}{2}$

**Câu 8:** Giải phương trình  $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$

A.  $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$

B.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$

C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi, x = k2\pi$       D.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$

**Câu 9:** Giải phương trình  $\cos^3 x + \sin^3 x = 2\sin 2x + \sin x + \cos x$

A.  $x = \frac{k3\pi}{2}$       B.  $x = \frac{k5\pi}{2}$       C.  $x = k\pi$       D.  $x = \frac{k\pi}{2}$

**Câu 10:** Giải phương trình  $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

A.  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2+\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k2\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt{2}} + k2\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt{2}} + k\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k2\pi$

**Câu 11:** Cho phương trình  $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ , trong đó  $m$  là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của  $m$  là

A.  $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2} - \sqrt{2} \leq m \leq 1$ .      C.  $1 \leq m \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ .      D.  $\frac{1}{2} + \sqrt{2} \leq m \leq 2$ .

**Câu 12:** Phương trình  $2\sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 5\pi + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .