

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP VỚI SIN VÀ COSIN

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

+ Là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\cos^k x \neq 0$ (k là số mũ cao nhất) ta được phương trình ẩn là $\tan x$.

Phương trình đẳng cấp bậc hai: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ (1)

Cách 1:

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có thỏa mãn (1) hay không?

Lưu ý: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$.

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t :

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{\sin 2x}{2} + c \frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b \sin 2x + (c - a) \cos 2x = 2d - a - c \text{ (đây là PT bậc nhất đối với } \sin 2x \text{ và } \cos 2x)$$

B – BÀI TẬP

Câu 1: Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3} \sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 2: Phương trình $(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} \text{ (vôùi } \tan \alpha = -2 + \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} \text{ (vôùi } \tan \alpha = 2 - \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} \text{ (vôùi } \tan \alpha = -1 + \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} \text{ (vôùi } \tan \alpha = 1 - \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}.$

Câu 3: Giải phương trình $3\sin^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$.

A. $x = \frac{1}{2} \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{1}{2} \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \arctan \frac{1+\sqrt{73}}{12} + \frac{k\pi}{2}, x = \arctan \frac{1-\sqrt{73}}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1+\sqrt{73}}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1-\sqrt{73}}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \arctan \frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2}, x = \arctan(-1) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 4: Phương trình $2\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ có nghiệm là:

A. $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 5: Một họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - \cos^2 x = -2$ là

A. $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 6: Một họ nghiệm của phương trình $2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x \cos x = 3 + \sqrt{3}$ là

A. $\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 7: Một họ nghiệm của phương trình $-3\sin x \cos x + \sin^2 x = 2$ là

A. $\arctan(-2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{1}{2} \arctan(-2) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $-\frac{1}{2} \arctan(-2) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 8: Một họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ là

A. $\arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $-\arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $-\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 9: Một họ nghiệm của phương trình $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$ là

A. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 10: Phương trình: $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ có họ nghiệm là

A. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 11: Phương trình $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x \cos 4x$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 12: Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $\sin^2 4x + 3 \sin 4x \cos 4x - 4 \cos^2 4x = 0$ có:

A. Ba nghiệm.

B. Một nghiệm.

C. Hai nghiệm.

D. Bốn nghiệm.

Câu 13: Phương trình $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x - 4 \sin^2 x = -4$ có họ nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 14: Phương trình $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ (với $k \in \mathbb{Z}$) có nghiệm là:

A. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k2\pi.$

B. $\frac{\pi}{4} + k\pi.$

C. $\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi.$

D. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi.$

Câu 15: Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = 2(\cos^5 x + \sin^5 x)$

A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$

B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi$

C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi$

D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$

Câu 16: Giải phương trình $\sin^2 x + 3 \tan x = \cos x(4 \sin x - \cos x)$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k2\pi$

B. $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\frac{1}{2}\pi$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\frac{2}{3}\pi$

D. $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi$

Câu 17: Giải phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3 \sin x(\cos x - \sin x) + 3$

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

Câu 18: Giải phương trình $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{3}\pi$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

Câu 19: Giải phương trình $2 \cos^3 x = \sin 3x$

A. $\begin{cases} x = \arctan(-2) + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = \arctan(-2) + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}$

C.
$$\begin{cases} x = \arctan(-2) + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Câu 20: Giải phương trình $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$

A.
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Câu 21: Giải phương trình $2\cos^2 x + 6\sin x \cos x + 6\sin^2 x = 1$

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k2\pi$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{2}{3}\pi$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{4}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{1}{4}\pi$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$