B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), x = a, x = b$ và trục hoành

Phương pháp

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_a^b |f(x)|dx = S$

Ví dụ 0. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; x = 0; x = 2$ và Ox

Giải

Trên $[0;2]$ ta có $x^2 > 0 \forall x \in [0;2]$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho $S = \int_0^2 |x^2|dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

Ví dụ 1.Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 + 4x - 3; x = 0; x = 2$ và Ox

Giải

Bảng xét dấu

x	0		1		3
y		−	0	+	0

$$S = \int_0^1 |-x^2 + 4x - 3|dx = -\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$$

$$= -\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{8}{3}$$

Ví dụ 2.Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x, x = 1, x = e$ và Ox

Giải

Do $\ln x \geq 0 \, \forall x \in [1;e]$ nên $S = \int_1^e |\ln x|\, dx = \int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^2 = 1$

Ví dụ 3.Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln^2 x}{x}, y = 0, x = 1, x = e$

Giải

Vì $\frac{\ln^2 x}{x} \geq 0 \, \forall x \in [1;e]$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là : $S = \int_1^e \left|\frac{\ln^2 x}{x}\right| dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận:

Với $x = 1$ ta được $t = 0$

Với $x = e$ ta được $t = 1$

Khi đó $S = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$ Vậy điện tích hình phẳng cần tìm bằng $\frac{1}{3}$

Ví dụ 4.Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x - 2, x = 0, x = 3, y = 0$

Giải

Ta có $-x - 2 = -(x + 2) < 0 \;\; \forall x \in [0;3]$

Vậy diện tích cần tính là $S = \int_0^3 |-x - 2|\, dx = \int_0^3 (x + 2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^3 = \frac{21}{2}$

Ví dụ 5.Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1, x = 0$

Giải

$$\frac{-x-2}{x-1} = 0 \Rightarrow x = -2 \notin [-1;0]$$

BXD

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$\frac{-x-2}{x-1}$		-	| +	|	-	

Từ bảng xét dấu ta có $\frac{-x-2}{x-1} > 0 \; \forall x \in [-1;0]$

Vậy diện tích cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{0} \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x-2}{x-1} dx = \int_{-1}^{0} x dx - 3\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} = -x - 3\ln|x-1| \Big|_{-1}^{0} = 3\ln 2 - 1$$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$

Giải

Trục tung có phương trình $x = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = 2 \in [0;2] \end{array} \right.$$

BXD:

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$x^3 - 3x^2 + 2$	+	|	-	|	+	

Dựa vào BXD ta có $x^3-3x^2+2\ge 0\,\forall x\in[0;1], x^3-3x^2+2\le 0\,\forall x\in[1;2]$

Vậy diện tích cần tính là

$$S=\int_0^2\left|x^3-3x^2+2\right|dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2\right)dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{2}$$

Dạng 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x), x=a,\ x=b$

Phương pháp

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=S$

Ví dụ 0. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=-2x+3, x=0, x=2$

Giải

Đặt $f(x)=x^2, \text{g}(x)=-2x+3$ ta đi xét dấu $f(x)-g(x)$

Ta có $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;2]\\x=-3\notin[0;2]\end{array}\right.$

BXD:

x	0 1 2
$f(x)-g(x)$	- / +

Vậy diện tích hình phẳng đã cho

$$S=\int_0^2\left|x^2+2x-3\right|dx=\left|\int_0^1\left(x^2+2x-3\right)dx\right|-\left|\int_1^2\left(x^2+2x-3\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Big|_0^1\right|-\left|\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Big|_1^2\right|=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+11\text{x}-6, y=6x^2, x=0, x=2$

Giải

$h(x)=x^3+11\text{x}-6-6x^2=x^3-6x^2+11\text{x}-6$

$h(x)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=2\vee x=3$ (loại)

Bảng xét dấu

x	0		1		2
h(x)		-	0	+	0

$$S=-\int_0^1\left(x^3-6x^2+11\text{x}-6\right)dx+\int_1^2\left(x^3-6x^2+11\text{x}-6\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm số $y=x^3-3x^2-\text{x}+3, y=-x^3-4x^2+\text{x}+4$ và 2 đường thẳng $x=0, x=2$

Giải

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-\text{x}+3, \text{g}(x)=-x^3-4x^2+\text{x}+4$

Ta có $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{2}\notin[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$

Vậy diện tích cần tính là

$$S=\int_0^2\left|2x^3+x^2-2x-1\right|dx=\left|\int_0^1\left(2x^3+x^2-2x-1\right)dx\right|+\left|\int_1^2\left(2x^3+x^2-2x-1\right)dx\right|=7$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x, y=x^2+1, x=-1, x=2$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Diện tích cần tính là

$$S=\int_{-1}^{2}\left|2x+1\right|dx=\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(2x+1)dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)dx\right|=\left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2}=\frac{13}{2}$$

Dạng 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x)$

Phương pháp

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$

Bước 2. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x)-g(x)$ trên đoạn $[\alpha;\beta]$ trong đó $\alpha;\beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x)=g(x)$

Bước 3. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_\alpha^\beta\left|f(x)-g(x)\right|dx=S$

Ví dụ 0. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = x + 2$

Giải

Đặt $f(x) = x^2, \mathrm{g(x)} = x + 2$

Ta có $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-1}^{2} \left| \mathrm{x}^2 - x - 2 \right| dx = \left| \int_{-1}^{2} \left(\mathrm{x}^2 - x - 2 \right) dx \right| = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Bigg|_{-1}^{-2} = \ldots$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = (x-1)\ln\mathrm{x}$ và đường thẳng $y = x - 1$

Giải

Xét phương trình $(x-1)\ln\mathrm{x} = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = e$

Diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{1}^{e} \left| (\mathrm{x}-1)(\ln\mathrm{x}-1) \right| dx = \left| \int_{1}^{e} (\mathrm{x}-1)(\ln\mathrm{x}-1) dx \right| = \left| \int_{1}^{e} (\ln\mathrm{x}-1) d\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^2}{2} - x \right)(\ln\mathrm{x}-1) \Bigg|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \right| = \left| \frac{-1}{2} - \left(\frac{1}{4}x^2 - x \right) \Bigg|_{1}^{e} \right| = \frac{e^2 - 4e + 5}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$S = \int_{-1}^{2} \left| \mathrm{x}^2 - x - 2 \right| dx = \left| \int_{-1}^{2} \left(\mathrm{x}^2 - x - 2 \right) dx \right| = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Bigg|_{-1}^{-2} = \ldots$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

$$\Rightarrow S = \left|\int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}\left(x^3 - 4x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right| = 8$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 11\text{x} - 6, y = 6x^2$.

Giải

Đặt $h(x) = x^3 + 11\text{x} - 6 - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 11\text{x} - 6$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$

BXD

x	1		2		3
h(x)	0	+	0	–	0

$$S = \int_{1}^{2}\left(x^3 - 6x^2 + 11\text{x} - 6\right)dx - \int_{2}^{3}\left(x^3 - 6x^2 + 11\text{x} - 6\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{1}^{2} - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{2}^{3} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ với trục hoành.

Giải

Trục tung có phương trình $x = 0$

Xét phương trình $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

BXD:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$-x^4+5x^2-4$		-		+		-		+		-	

Dựa vào BXD ta có

$-x^4+5x^2-4 \le 0 \,\forall x \in [-1;1], -x^4+5x^2-4 \ge 0 \,\forall x \in [-2;-1] \cup [1;2]$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_{-2}^{-1} \left(-x^4+5x^2-4\right)dx - \int_{-1}^{1} \left(-x^4+5x^2-4\right)dx + \int_{1}^{2} \left(-x^4+5x^2-4\right)dx$$

$$= \left(\frac{-x^5}{5}+\frac{5x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{-x^5}{5}+\frac{5x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{-x^5}{5}+\frac{5x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 8$$

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2-3x+2$ và đường thẳng $y = x-1$

Giải

Đặt $f(x) = x^2-3x+2; g(x) = x-1$

$$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_1^3 \left|x^2-4x+3\right|dx = \left|\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)dx\right| = \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}$$