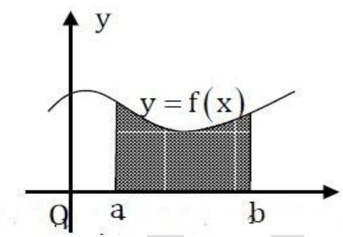
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG:

Định lý 1.Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục không âm trên $[a;b]$

Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi dồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a,\ x = b$ là: $S = \int_a^b f(x)dx$

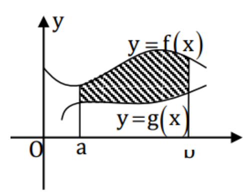


Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi : Đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục $Ox:(y=0)$ và 2 đường thẳng $x = a,\ x = b$ là:

$$S = \int_a^b \left| f(x)dx \right|$$

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi : Đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục $Ox:(y=0)$ và 2 đường thẳng $x = a,\ x = b$ là:

$$S = \int_a^b \left| f(x)dx \right|$$



Chú ý:

1) Để phá bỏ dấu trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

   * Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1,\ x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$

$$\left(x_1 < x_2 < \ldots < x_n\right)$$

Tính

$$S = \int_a^{x} \left|f(x) - g(x)\right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left|f(x) - g(x)\right| dx + \ldots + \int_{x_n}^{b} \left|f(x) - g(x)\right| dx$$

$$= \left|\int_a^{x} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right|$$

Ngoài cách trên ra ta có thể dựa vào biểu đồ để bỏ dấu trị tuyệt đối.

2) Trong nhiều trường hợp bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $\left(C_1\right): y = f(x)$, $\left(C_2\right): y = g(x)$. Khi đó ta có công thức tính như sau:

$$S = \int_{x_1}^{x_n} \left|f(x) - g(x)\right| dx.$$

Trong đó x_1, x_2 tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của phương trình: $f(x) = g(x)$.

II. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY:

a. Tính thể tích của vật thể

Định lý 2. Cắt 1 vật thể C bởi 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a, x = b\left(a < b\right)$. Một vật bất kì vuông góc với Ox tại điểm x $\left(a \le x \le b\right)$ cắt C theo 1 thiết diện có diện tích S(x). Giả sử S(x) là hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó thể tích của vật thể C giới hạn bởi 2 mặt phẳng (P) và (Q) được tính theo công thức $V = \int_a^b S(x)dx$

b. Tính thể tích vật tròn xoay

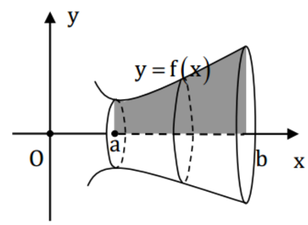
Bài toán 1. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay miền D được giới hạn bởi các đường

$y = f(x); y = 0; x = a; x = b$ quanh trục Ox

Thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ bằng là một hình tròn có bán kính $R=\left|f(x)\right|$ *nên diện tích thiết diện bằng*

$S(\mathrm{x})=\pi \mathrm{R}^2=\pi f^2(x)$ *Vậy thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức :*

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b \mathrm{f}^2(x)dx$$



Chú ý:

Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right); y=g\left(x\right);\ x=a;\ x=b$. Với $\left(f(x).g(x)\geq 0\ \forall x\in[a;b]\right)$ thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức :

$$V=\pi\int_a^b\left|\mathrm{f}^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

Bài toán 2. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $x=g\left(y\right);\ y=a\ ;\mathrm{y}=b;Oy$ quanh trục Oy được tính theo công thức $V=\pi\int_a^b g^2(\mathrm{y})dy$

Chú ý: Trong trường hợp ta không tìm được x theo y thì ta có thể giải bài toán theo cách sau.

Chứng minh hàm số $y\ =\ f\left(x\right)$ liên tục và đơn điệu trên $[\mathrm{c};\mathrm{d}]$ với

$c=\min\left\{g(a),g(b)\right\},\mathrm{d}=\max\left\{g(a),g(b)\right\}$. Khi đó phương trình $y\ =\ f\left(x\right)$ có duy nhất nghiệm $\mathrm{x}\ =\ \mathrm{g}\left(y\right)$.

Thực hiện phép đổi biến $\mathrm{x}\ =\ \mathrm{g}\left(y\right), d(y)=f^{'}(x)dx$ ta có $V=\pi\int_c^d x^2 f^{'}(x)dx$