DÃY SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.
- Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương n = k tuỳ ý ($k \ge 1$), chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề A(n) là đúng với với mọi số nguyên dương $n \ge p$ thì:

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \ge p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

2. Dãy số

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in N^*$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ với $\forall n \in N^*$ $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với $\forall n \in N^*$ $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

4. Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \le M, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n \ge m, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \le u_n \le M, \forall n \in N^*$.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

Câu 1: Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1, 3, 19, 53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

A. $u_{10} = 97$ **B.** $u_{10} = 71$ **C.** $u_{10} = 1414$ **D.** $u_{10} = 971$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an^2}{n+1}$ (a: hằng số). u_{n+1} là số hạng nào sau đây?

A. $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$. **B.** $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **C.** $u_{n+1} = \dfrac{a.n^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1} = \dfrac{an^2}{n+2}$.

Câu 3: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5; 10; 15; 20; 25; \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 5(n-1)$. **B.** $u_n = 5n$. **C.** $u_n = 5+n$. **D.** $u_n = 5.n+1$.

Câu 4: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $8,15,22,29,36,....$Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 7n + 7$. **B.** $u_n = 7.n$.

C. $u_n = 7.n + 1$. **D.** u_n: Không viết được dưới dạng công thức.

Câu 5: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};....$Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n = \frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Câu 6: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0,1;0,01;0,001;0,0001;...$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = \underbrace{0,00...01}_{n \text{ chöõ soá } 0}$. **B.** $u_n = \underbrace{0,00...01}_{n-1 \text{ chöõ soá } 0}$. **C.** $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n = \frac{1}{10^{n+1}}$.

Câu 7: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1;1;-1;1;-1;....$Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng

A. $u_n = 1$. **B.** $u_n = -1$. **C.** $u_n = (-1)^n$. **D.** $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 8: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;....$Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = -2n$. **B.** $u_n = (-2) + n$.

C. $u_n = (-2)(n+1)$. **D.** $u_n = (-2) + 2(n-1)$.

Câu 9: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};\frac{1}{3^5};....$Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n = \frac{1}{3}\frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n = \frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$.

C. $u_n = 5 + \frac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n = 5 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 - n$. **B.** u_n không xác định.

C. $u_n = 1 - n$. **D.** $u_n = -n$ với mọi n.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.
D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n-1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$.
B. $u_n = 2 + n^2$.
C. $u_n = 2 + (n+1)^2$.
D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\frac{n-1}{n}$.
B. $u_n = \frac{n+1}{n}$.
C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.
D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.
B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.
C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.
D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
B. $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
C. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
D. $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này :

A. $u_n = n^{n-1}$.
B. $u_n = 2^n$.
C. $u_n = 2^{n+1}$.
D. $u_n = 2$.

Câu19 : Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$.
B. $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$.
C. $u_n = \frac{-1}{2^n}$.
D. $u_n = 2^{n-2}$.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1}$. Viết năm số hạng đầu của dãy;

A. $\frac{11}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$
B. $\frac{13}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$
C. $\frac{11}{2};\frac{14}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$
D. $\frac{11}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};8;\frac{47}{6}$

Câu 21: Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2
B. 4
C. 1
D. Không có

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Viết năm số hạng đầu của dãy;

A. 1;5;13;28;61 **B.** 1;5;13;29;61 **C.** 1;5;17;29;61 **D.** 1;5;14;29;61

Câu 23: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1 = 3, v_1 = 2$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n.v_n \end{cases}$ với $n \ge 2$.

Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

A. $\begin{cases} u_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$

DẠNG 2: DÃY SỐ ĐƠN ĐIỆU, DÃY SỐ BỊ CHẶN

Câu 1: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 2: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 3: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 4: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 5: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{2n - 13}{3n - 2}$

A. Dãy số tăng, bị chặn **B.** Dãy số giảm, bị chặn
C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 6: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 7: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + n + n^2}}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 8: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 9: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

A. Dãy số tăng, bị chặn **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên **D. Cả** A, B, C đều sai

Câu 10: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 11: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = (-1)^n$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 12: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 3n - 1$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 13: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 14: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 15: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 16: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+2)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 17: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 18: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+2}{u_{n-1}+1} \quad , n \ge 2 \end{cases}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 19: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3+1},\ n \ge 1 \end{cases}$

A. Tăng **B.** Giảm

C. Không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai

Câu 20: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{4} \quad n \ge 1 \end{cases}$

A. Tăng **B.** Giảm

C. Không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai

Câu 21: dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \sqrt{2010 + \sqrt{2010 + ... + \sqrt{2010}}}$ (n dấu căn)Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tăng **B.** Giảm

C. Không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai

Câu 22: Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = \sqrt[3]{u_{n-1}} + \sqrt[3]{u_{n-2}}, n \ge 3 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn

C. Không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai

Câu 23: Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{an+2}{2n-1}$, $n \ge 1$. Khi $a = 4$, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

A. $u_1 = 2, u_2 = \dfrac{10}{3}, u_3 = \dfrac{14}{5}, u_4 = \dfrac{18}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$

B. $u_1=6,u_2=\frac{10}{3},u_3=\frac{14}{5},u_4=\frac{18}{7},u_5=\frac{22}{9}$

C. $u_1=6,u_2=\frac{1}{3},u_3=\frac{1}{5},u_4=\frac{18}{7},u_5=\frac{22}{9}$

D. $u_1=6,u_2=\frac{10}{3},u_3=\frac{4}{5},u_4=\frac{8}{7},u_5=\frac{22}{9}$

Câu 24: Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

A. $a<2$ **B.** $a<-2$ **C.** $a<4$ **D.** $a<-4$

Câu 25: Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\u_n=3u_{n-1}-2,\ n=2,3..\end{cases}$ Viết 6 số hạng đầu của dãy

A. $u_1=2,u_2=5,u_3=10,u_4=28,u_5=82,u_6=244$

B. $u_1=2,u_2=4,u_3=10,u_4=18,u_5=82,u_6=244$

C. $u_1=2,u_2=4,u_3=10,u_4=28,u_5=72,u_6=244$

D. $u_1=2,u_2=4,u_3=10,u_4=28,u_5=82,u_6=244$

Câu 26: Cho dãy số $u_n=-5.2^{n-1}+3^n+n+2$, $n=1,2,...$ Viết 5 số hạng đầu của dãy

A. $u_1=1,u_2=3,u_3=12,u_4=49,u_5=170$

B. $u_1=1,u_2=3,u_3=12,u_4=47,u_5=170$

C. $u_1=1,u_2=3,u_3=24,u_4=47,u_5=170$

D. $u_1=1,u_2=3,u_3=12,u_4=47,u_5=178$

Câu 27:

1. Cho dãy số (u_n): $u_n=(1-a)^n+(1+a)^n$,trong đó $a\in(0;1)$ và n là số nguyên dương.

a)Viết công thức truy hồi của dãy số

A. $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+a\left[(1+a)^n+(1-a)^n\right]\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+2a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right]\end{cases}$

C. $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n+a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right]\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right]\end{cases}$

b)Xét tính đơn điệu của dãy số

A. Dãy (u_n) là dãy số tăng. **B.** Dãy (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy (u_n) là dãy số không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1\\u_n=3u_{n-1}+\dfrac{1}{2u_{n-1}}-2,\ n\ge 2\end{cases}$.

Viết 4 số hạng đầu của dãy và chứng minh rằng $u_n>0,\ \forall n$

A. $u_1=1,u_2=\frac{3}{2},u_3=\frac{47}{6},u_4=\frac{227}{34}$ **B.** $u_1=1,u_2=\frac{3}{2},u_3=\frac{17}{6},u_4=\frac{227}{34}$

C. $u_1=1,u_2=\frac{3}{2},u_3=\frac{19}{6},u_4=\frac{227}{34}$ **D.** $u_1=1,u_2=\frac{3}{2},u_3=\frac{17}{6},u_4=\frac{2127}{34}$

Câu 29: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + 1}, \ \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

a) Khẳng định nào sau đây đúng

A. Dãy (u_n) là dãy giảm
B. Dãy (u_n) là dãy tăng
C. Dãy (u_n) là dãy không tăng, không giảm
D. A, B, C đều sai

b) Tìm phần nguyên của u_n với $0 \le n \le 1006$.

A. $[u_n] = 2014 - n$
B. $[u_n] = 2011 - n$
C. $[u_n] = 2013 - n$
D. $[u_n] = 2012 - n$

Câu 30: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 6 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \ \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

a) Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Chứng minh rằng: $u_n = a^n + b^n$

b) Chứng minh rằng: $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n-1}.8$.

Câu 31: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Tăng, chặn dưới
D. Giảm, chặn trên

Câu 32: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Tăng, chặn dưới
D. Giảm, chặn trên

Câu 33: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Tăng, chặn dưới
D. Giảm, chặn trên

Câu 34: Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Tăng, chặn dưới
D. Giảm, chặn trên

Câu 35: Cho dãy số $(x_n): \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i, \ n = 2, 3, ... \end{cases}$. Xét dãy số $y_n = x_{n+1} - x_n$. Khẳng định nào đúng về dãy (y_n)

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Tăng, chặn dưới
D. Giảm, chặn trên

Câu 36: Cho dãy số (Un) với $Un = \dfrac{-n}{n+1}$.Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-5}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

B. 5 số số hạng đầu của dãy là : $\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-2}{3}; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-4}{5}; \dfrac{-5}{6}$.

C. Là dãy số tăng.
D. Bị chặn trên bởi số 1.

Câu 37: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{30};$

B. Là dãy số tăng.

C. Bị chặn trên bởi số $M = \dfrac{1}{2}$.

D. Không bị chặn.

Câu 38: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{-1}{n}$.Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $-1;\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{3};\dfrac{-1}{4};\dfrac{-1}{5}$.

B. Bị chặn trên bởi số $M = -1$.

C. Bị chặn trên bởi số $M = 0$.

D. Là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi số m $M = -1$.

Câu 39: Cho dãy số (u_n) với $u_n = a.3^n$ (a : hằng số).Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Dãy số có $u_{n+1} = a.3^{n+1}$.

B. Hiệu số $u_{n+1} - u_n = 3.a$.

C. Với $a > 0$ thì dãy số tăng

D. Với $a < 0$ thì dãy số giảm.

Câu 40: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{a-1}{n^2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Dãy số có $u_{n+1} = \dfrac{a-1}{n^2+1}$.

B. Dãy số có : $u_{n+1} = \dfrac{a-1}{(n+1)^2}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Là dãy số tăng.

Câu 41: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{a-1}{n^2}$ (a : hằng số). Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \dfrac{a-1}{(n+1)^2}$.

B. Hiệu $u_{n+1} - u_n = (1-a).\dfrac{2n-1}{(n+1)^2 n^2}$.

C. Hiệu $u_{n+1} - u_n = (a-1).\dfrac{2n-1}{(n+1)^2 n^2}$.

D. Dãy số tăng khi $a < 1$.

Câu 42: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an^2}{n+1}$ (a : hằng số). Kết quả nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$.

B. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a.(n^2+3n+1)}{(n+2)(n+1)}$.

C. Là dãy số luôn tăng với mọi a.

D. Là dãy số tăng với $a > 0$.

Câu 43: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{k}{3^n}$ (k : hằng số). Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ 5 của dãy số là $\dfrac{k}{3^5}$.

B. Số hạng thứ n của dãy số là $\dfrac{k}{3^{n+1}}$.

C. Là dãy số giảm khi $k > 0$.

D. Là dãy số tăng khi $k > 0$.

Câu 44: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

C. Đây là một dãy số giảm.

D. Bị chặn trên bởi số $M=1$.

Câu 45: Cho dãy số (u_n) có $u_n=\sqrt{n-1}$ với $n\in N^*$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. 5 số hạng đầu của dãy là: $0;1;\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5}$.

B. Số hạng $u_{n+1}=\sqrt{n}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Bị chặn dưới bởi số 0.

Câu 45: Cho dãy số (u_n) có $u_n=-n^2+n+1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. 5 số hạng đầu của dãy là: $-1;1;5;-5;-11;-19$.

B. $u_{n+1}=-n^2+n+2$.

C. $u_{n-1}-u_n=1$.

D. Là một dãy số giảm.

Câu 46: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{-1}{n^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1}=\dfrac{-1}{(n+1)^2+1}$.

B. $u_n>u_{n+1}$.

C. Đây là một dãy số tăng.

D. Bị chặn dưới.

Câu 47: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy: $u_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{n+2}$

B. Dãy số bị chặn.

C. Đây là một dãy số tăng.

D. Dãy số không tăng không giảm.

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

Câu 1: Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1,3,19,53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

A. $u_{10}=97$ **B.** $u_{10}=71$ **C.** $u_{10}=1414$ **D.** $u_{10}=971$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Xét dãy (u_n) có dạng: $u_n=an^3+bn^2+cn+d$

Ta có hệ: $\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=19 \\ 64a+16b+4c+d=53 \end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=1,b=0,c=-3,d=1$

$\Rightarrow u_n=n^3-3n+1$ là một quy luật.

Số hạng thứ 10: $u_{10}=971$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an^2}{n+1}$ (a: hằng số). u_{n+1} là số hạng nào sau đây?

A. $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$. **B.** $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **C.** $u_{n+1}=\dfrac{a.n^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1}=\dfrac{an^2}{n+2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{(n+1)+1}=\dfrac{a(n+1)^2}{(n+2)^2}$.

Câu 3: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;\ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=5(n-1)$. **B.** $u_n=5n$. **C.** $u_n=5+n$. **D.** $u_n=5.n+1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:

$5=5.1$

$10=5.2$

$15=5.3$

$20=5.4$

$25=5.5$

Suy ra số hạng tổng quát $u_n=5n$.

Câu 4: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $8,15,22,29,36,\ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=7n+7$. **B.** $u_n=7.n$.

C. $u_n=7.n+1$. **D.** u_n: Không viết được dưới dạng công thức.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có:
$8=7.1+1$
$15=7.2+1$
$22=7.3+1$
$29=7.4+1$
$36=7.5+1$
Suy ra số hạng tổng quát $u_n=7n+1$.

Câu 5: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...$ .Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=\frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-n}{n+1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:
$0=\frac{0}{0+1}$
$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$
$\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$
$\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$
$\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$
Suy ra $u_n=\frac{n}{n+1}$.

Câu 6: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0,1;0,01;0,001;0,0001;...$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n=\underbrace{0,00...01}_{n \text{ chöõ soá } 0}$. **B.** $u_n=\underbrace{0,00...01}_{n-1 \text{ chöõ soá } 0}$. **C.** $u_n=\frac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n=\frac{1}{10^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:
Số hạng thứ 1 có 1 chữ số 0
Số hạng thứ 2 có 2 chữ số 0
Số hạng thứ 3 có 3 chữ số 0
……………………………
Suy ra u_n có n chữ số 0.

Câu 7: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1;1;-1;1;-1;...$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$. **C.** $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có:
Các số hạng đầu của dãy là $(-1)^1;(-1)^2;(-1)^3;(-1)^4;(-1)^5;...\Rightarrow u_n=(-1)^n$.

Câu 8: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;...$.Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = -2n$. **B.** $u_n = (-2) + n$.
C. $u_n = (-2)(n+1)$. **D.** $u_n = (-2) + 2(n-1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Dãy số là dãy số cách đều có khoảng cách là 2 và số hạng đầu tiên là (-2) nên $u_n = (-2) + 2.(n-1)$.

Câu 9: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \ldots$.Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n = \frac{1}{3}\frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n = \frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

5 số hạng đầu là $\frac{1}{3_1}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \ldots$ nên $u_n = \frac{1}{3^n}$.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$.
C. $u_n = 5 + \frac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n = 5 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $u_n = 5 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = 5 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; \ldots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n$ $(*)$ bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

+ Giả sử $(*)$ đúng với mọi $n = k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $u_k = k$. Ta đi chứng minh $(*)$ cũng đúng với $n = k + 1$, tức là: $u_{k+1} = k + 1$

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$. Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 - n$. **B.** u_n không xác định.

C. $u_n = 1-n$. **D.** $u_n = -n$ với mọi n.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_2 = 0; u_3 = -1; u_4 = -2$,.. Dễ dàng dự đoán được $u_n = 2-n$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ \ldots \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n-1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 3 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 2 + 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) = 2 + (n-1)^2$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_1 = -\dfrac{3}{2}; u_2 = -\dfrac{4}{3}; u_3 = -\dfrac{5}{4}; \ldots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = \dfrac{1}{2} - 2 - 2 ... - 2 = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. **C.** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n = (-1).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = \dfrac{u_1}{2} \\ u_3 = \dfrac{u_2}{2} \\ ... \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được

$$u_1.u_2.u_3...u_n = (-1).\frac{u_1.u_2.u_3...u_{n-1}}{\underbrace{2.2.2...2}_{n-1 \text{ lan}}} \Leftrightarrow u_n = (-1).\frac{1}{2^{n-1}} = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này :

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = 2.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$

Câu19 : Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$. **B.** $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \frac{-1}{2^n}$. **D.** $u_n = 2^{n-2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = \frac{1}{2}.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-2}$

Câu 20: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$. Viết năm số hạng đầu của dãy;

A. $\frac{11}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$ **B.** $\frac{13}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$ **C.** $\frac{11}{2};\frac{14}{3};\frac{25}{4};7;\frac{47}{6}$ **D.** $\frac{11}{2};\frac{17}{3};\frac{25}{4};8;\frac{47}{6}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có năm số hạng đầu của dãy

$$u_1 = \frac{1^2 + 3.1 + 7}{1+1} = \frac{11}{2},\ u_2 = \frac{17}{3}, u_3 = \frac{25}{4}, u_4 = 7, u_5 = \frac{47}{6}$$

Câu 21: Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** Không có

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n = n + 2 + \frac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{n+1}$ nguyên hay $n+1$ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n+1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4 = 7$.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Viết năm số hạng đầu của dãy;

A. 1;5;13;28;61 **B.** 1;5;13;29;61 **C.** 1;5;17;29;61 **D.** 1;5;14;29;61

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1=1;\ u_2=2u_1+3=5;\ u_3=2u_2+3=13;\ u_4=2u_3+3=29$

$u_5=2u_4+3=61$.

Câu 23: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1=3,v_1=2$ và $\begin{cases}u_{n+1}=u_n^2+2v_n^2\\ v_{n+1}=2u_n.v_n\end{cases}$ với $n\ge 2$.

Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

A. $\begin{cases}u_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\end{cases}$

B. $\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\end{cases}$

C. $\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\end{cases}$

D. $\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Chứng minh $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ (2)

Ta có: $u_n-\sqrt{2}v_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2-2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

- Ta có: $u_1-\sqrt{2}v_1=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên (2) đúng với $n=1$
- Giả sử $u_k-\sqrt{2}v_k=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^k}$, ta có:

$$u_{k+1}-\sqrt{2}v_{k+1}=\left(u_k-\sqrt{2}v_k\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng với $\forall n\ge 1$.

Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n+\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases}2u_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\\ 2\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\end{cases}$

Hay $\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]\end{cases}$.

DẠNG 2: DÃY SỐ ĐƠN ĐIỆU, DÃY SỐ BỊ CHẶN

Câu 1: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5n^2 + 10n + 2}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên dãy (u_n) là dãy tăng

Câu 2: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0$

Chọn B.

Nên dãy (u_n) giảm.

Câu 3: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng.

Câu 4: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2}$

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng không giảm **D. Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_1 = 0; u_2 = \dfrac{1}{2}; u_3 = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 < u_2 \end{cases} \Rightarrow$ Dãy số không tăng không giảm.

Câu 5: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \dfrac{2n - 13}{3n - 2}$

A. Dãy số tăng, bị chặn **B.** Dãy số giảm, bị chặn
C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn **D. Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{2n-11}{3n+1}-\frac{2n-13}{3n-2}=\frac{34}{(3n+1)(3n-2)}>0$ với mọi $n\ge 1$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n \quad \forall n\ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n=\frac{2}{3}-\frac{35}{3(3n-2)}\Rightarrow -11\le u_n<\frac{2}{3} \quad \forall n\ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 6: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên
D. **Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

$=\frac{n^2+5n+5}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

$=\frac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$=\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}>0 \ \forall n\ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1}>u_n \ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

$u_n>\frac{n^2+2n+1}{n+1}=n+1\ge 2\Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới.

Câu 7: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=\frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn
D. **Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n>0 \ \forall n\ge 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}}<1 \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1}<u_n \ \forall\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác: $0<u_n<1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 8: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=\frac{2^n}{n!}$

A. Dãy số tăng, bị chặn trên
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên
D. **Cả** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}<1\ \forall n\ge 1$

Mà $u_n>0\ \forall n\Rightarrow u_{n+1}<u_n\ \ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Vì $0<u_n\le u_1=2\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 9: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$.

A. Dãy số tăng, bị chặn
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới
C. Dãy số giảm, bị chặn trên
D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Do $u_n<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=2+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow 1<u_n<3\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 10: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=\frac{2n+1}{n+2}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $0<u_n<2\ \ \forall n$ nên dãy (u_n) bị chặn

Câu 11: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=(-1)^n$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $-1\le u_n\le 1\Rightarrow(u_n)$ là dãy bị chặn

Câu 12: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=3n-1$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Ta có: $u_n\ge 2\ \ \forall n\Rightarrow(u_n)$ bị chặn dưới; dãy (u_n) không bị chặn trên.

Câu 13: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=4-3n-n^2$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n=\frac{25}{4}-(n+\frac{3}{2})^2<\frac{25}{4}\Rightarrow(u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Câu 14: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $1 < u_n < 2\ \forall n \Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Câu 15: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $0 < u_n < 2\ \forall n \Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Câu 16: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+2)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $0 < u_n < \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$

Dãy (u_n) bị chặn.

Câu 17: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_n = \dfrac{n}{2n+1} \Rightarrow 0 < u_n < 1$, dãy (u_n) bị chặn.

Câu 18: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+2}{u_{n-1}+1} \end{cases},\ n \geq 2$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $1 < u_n < 2$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 19: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3+1},\ n \geq 1 \end{cases}$

A. Tăng **B.** Giảm

C. Không tăng, không giảm **D.** A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3+1} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt[3]{u_n^3} = u_n\ \forall n \Rightarrow$ dãy số tăng

Câu 20: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{4} \quad n \ge 1 \end{cases}$

A. Tăng
B. Giảm
C. Không tăng, không giảm
D. A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 4u_n + 1}{4}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $2-\sqrt{3} < u_n < 2 \ \forall n$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$. Dãy (u_n) giảm.

Câu 21: dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \sqrt{2010 + \sqrt{2010 + ... + \sqrt{2010}}}$ (n dấu căn)Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tăng
B. Giảm
C. Không tăng, không giảm
D. A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $u_{n+1}^2 = 2010 + u_n \ \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -u_{n+1}^2 + u_{n+1} + 2010$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n < \dfrac{1+\sqrt{8041}}{2} \quad \forall n$

Suy ra $u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = \sqrt[3]{u_{n-1}} + \sqrt[3]{u_{n-2}}, n \ge 3 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tăng, bị chặn
B. Giảm, bị chặn
C. Không tăng, không giảm
D. A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Chứng minh bằng quy nạp : $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k} + \sqrt[3]{u_{k-2}} > \sqrt[3]{u_{k-1}} + \sqrt[3]{u_{k-2}} = u_k$

Ta chứng minh: $0 < u_n < 3$.

Câu 23: Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{an+2}{2n-1}$, $n \ge 1$. Khi $a = 4$, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

A. $u_1 = 2, u_2 = \dfrac{10}{3}, u_3 = \dfrac{14}{5}, u_4 = \dfrac{18}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$

B. $u_1 = 6, u_2 = \dfrac{10}{3}, u_3 = \dfrac{14}{5}, u_4 = \dfrac{18}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$

C. $u_1 = 6, u_2 = \dfrac{1}{3}, u_3 = \dfrac{1}{5}, u_4 = \dfrac{18}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$

D. $u_1 = 6, u_2 = \dfrac{10}{3}, u_3 = \dfrac{4}{5}, u_4 = \dfrac{8}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với $a=4$ ta có: $u_n=\dfrac{4n+2}{2n-1}$. Ta có: 5 số hạng đầu của dãy là

$$u_1=6, u_2=\frac{10}{3}, u_3=\frac{14}{5}, u_4=\frac{18}{7}, u_5=\frac{22}{9}.$$

Câu 24: Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

A. $a<2$ **B.** $a<-2$ **C.** $a<4$ **D.** $a<-4$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có dãy số (u_n) tăng khi và chỉ khi:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-a-4}{(2n+1)(2n-1)}>0, \ \forall n\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow -a-4>0 \Leftrightarrow a<-4.$$

Câu 25: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1=2 \\ u_n=3u_{n-1}-2, \ n=2,3.. \end{cases}$ Viết 6 số hạng đầu của dãy

A. $u_1=2, u_2=5, u_3=10, u_4=28, u_5=82, u_6=244$

B. $u_1=2, u_2=4, u_3=10, u_4=18, u_5=82, u_6=244$

C. $u_1=2, u_2=4, u_3=10, u_4=28, u_5=72, u_6=244$

D. $u_1=2, u_2=4, u_3=10, u_4=28, u_5=82, u_6=244$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $u_1=2, u_2=4, u_3=10, u_4=28, u_5=82, u_6=244$

Câu 26: Cho dãy số $u_n=-5.2^{n-1}+3^n+n+2$, $n=1,2,...$ Viết 5 số hạng đầu của dãy

A. $u_1=1, u_2=3, u_3=12, u_4=49, u_5=170$

B. $u_1=1, u_2=3, u_3=12, u_4=47, u_5=170$

C. $u_1=1, u_2=3, u_3=24, u_4=47, u_5=170$

D. $u_1=1, u_2=3, u_3=12, u_4=47, u_5=178$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_1=1, u_2=3, u_3=12, u_4=47, u_5=170$

Câu 27:

1. Cho dãy số (u_n): $u_n=(1-a)^n+(1+a)^n$,trong đó $a\in(0;1)$ và n là số nguyên dương.

a)Viết công thức truy hồi của dãy số

A. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+a\left[(1+a)^n+(1-a)^n\right] \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+2a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right] \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=2u_n+a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right] \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+a\left[(1+a)^n-(1-a)^n\right] \end{cases}$

b)Xét tính đơn điệu của dãy số

A. Dãy (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy (u_n) là dãy số không tăng, không giảm

D. A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + a\left[(1+a)^n - (1-a)^n\right] \end{cases}$

b) Dãy (u_n) là dãy số tăng.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + \dfrac{1}{2u_{n-1}} - 2,\ n \geq 2 \end{cases}$.

Viết 4 số hạng đầu của dãy và chứng minh rằng $u_n > 0,\ \forall n$

A. $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2}, u_3 = \dfrac{47}{6}, u_4 = \dfrac{227}{34}$

B. $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2}, u_3 = \dfrac{17}{6}, u_4 = \dfrac{227}{34}$

C. $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2}, u_3 = \dfrac{19}{6}, u_4 = \dfrac{227}{34}$

D. $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2}, u_3 = \dfrac{17}{6}, u_4 = \dfrac{2127}{34}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{3}{2}, u_3 = \dfrac{17}{6}, u_4 = \dfrac{227}{34}$.

Ta chứng minh $u_n > 0,\ \forall n$ bằng quy nạp.

Giả sử $u_n > 0$, khi đó: $2u_n + \dfrac{1}{2u_n} \geq 2\sqrt{2u_n.\dfrac{1}{2u_n}} = 2$

Nên $u_{n+1} = u_n + \left(2u_n + \dfrac{1}{2u_n} - 2\right) > u_n > 0$.

Câu 29: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + 1},\ \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

a) Khẳng định nào sau đây đúng

A. Dãy (u_n) là dãy giảm

B. Dãy (u_n) là dãy tăng

C. Dãy (u_n) là dãy không tăng, không giảm

D. A, B, C đều sai

b) Tìm phần nguyên của u_n với $0 \leq n \leq 1006$.

A. $[u_n] = 2014 - n$

B. $[u_n] = 2011 - n$

C. $[u_n] = 2013 - n$

D. $[u_n] = 2012 - n$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n}{u_n + 1} < 0,\ \forall n$ nên dãy (u_n) là dãy giảm

b) Ta có: $u_n = u_{n-1} - \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-1} + 1} > u_{n-1} - 1 > ... > u_0 - n$

Suy ra: $u_{n-1} > u_0 - (n-1) = 2012 - n$

Mặt khác:

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - u_0) + u_0$$

$$= u_0 - \left(\dfrac{u_0}{u_0 + 1} + \dfrac{u_1}{u_1 + 1} + ... + \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-1} + 1}\right)$$

$$= u_0 - n + \left(\frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + ... + \frac{1}{u_{n-1}+1}\right)$$

Mà:

$$0 < \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + ... + \frac{1}{u_{n-1}+1} < \frac{n}{u_{n-1}+1} < \frac{n}{2013-n} < 1$$

Với mọi $n = \overline{2,1006}$.

Suy ra $u_n < u_0 - n + 1 = 2012 - n$

Do đó: $2011 - n < u_n < 2012 - n \Rightarrow [u_n] = 2011 - n$

với $n = \overline{2,1006}$.

Vì $u_0 = 2011$ và $u_1 = \frac{2011^2}{2012} = 2010,000497$

nên $[u_0] = 2011 - 0,\ [u_1] = 2010 = 2011 - 1$

Vậy $[u_n] = 2011 - n,\ \forall n = \overline{0,1006}$.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 6 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1},\ \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

a) Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Chứng minh rằng: $u_n = a^n + b^n$

b) Chứng minh rằng: $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n-1}.8$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = a + b = 2$

Giả sử $u_n = a^n + b^n,\ \forall n \le k$

Khi đó: $u_{k+1} = 2u_k + u_{k-1} = 2\left(a^k + b^k\right) + a^{k-1} + b^{k-1}$

$$= (a+b)\left(a^k + b^k\right) + a^{k-1} + b^{k-1} = a^{k+1} + b^{k+1} + ab(a^{k-1} + b^{k-1}) + a^{k-1} + b^{k-1}$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} - (a^{k-1} + b^{k-1}) + a^{k-1} + b^{k-1} = a^{k+1} + b^{k+1}.$$

b) Ta có:

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - \left(2u_{n+1} + u_n\right).u_n$$

$$= u_{n+1}\left(u_{n+1} - 2u_n\right) - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}) = ... = (-1)^{n-1}\left(u_2^2 - u_3u_1\right) = (-1)^n.8.$$

Câu 31: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = \frac{n+1}{n+2}$

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn **C.** Tăng, chặn dưới **D.** Giảm, chặn trên

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0,\ \forall n.$$

Mặt khác: $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1,\ \forall n$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Câu 32: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn **C.** Tăng, chặn dưới **D.** Giảm, chặn trên

Hướng dẫn giải:

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 + 2(n+1) - n^3 - 2n$

$= 3n^2 + 3n + 3 > 0,\quad \forall n$

Mặt khác: $u_n > 1,\ \forall n$ và khi n càng lớn thì u_n càng lớn.

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn dưới.

Câu 33: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn **C.** Tăng, chặn dưới **D.** Giảm, chặn trên

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh: $1 < u_n \leq 2,\ \forall n$

Điều này đúng với $n = 1$, giả sử $1 < u_n < 2$ ta có:

$1 < u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} < 2$ nên ta có đpcm.

Mà $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n}{2} < 0,\ \forall n$.

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Câu 34: Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn **C.** Tăng, chặn dưới **D.** Giảm, chặn trên

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4,\ \forall n$

Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1$.

Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng

Ta có: $u_1 < u_2$, giả sử $u_{n-1} < u_n,\ \forall n \leq k$.

Khi đó: $\begin{cases} u_k < u_{k-1} \\ u_{k-1} < u_{k-2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} \Rightarrow u_{k+1} < u_k$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Câu 35: Cho dãy số $(x_n):\begin{cases} x_0=1 \\ x_n=\dfrac{2n}{(n-1)^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i,\ n=2,3,... \end{cases}$. Xét dãy số $y_n=x_{n+1}-x_n$. Khẳng định nào đúng về dãy (y_n)

A. Tăng, bị chặn **B.** Giảm, bị chặn **C.** Tăng, chặn dưới **D.** Giảm, chặn trên

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $x_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)$

$=\dfrac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n+\dfrac{(n-1)^2}{2n}x_n\right)=\dfrac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n$.

Do đó: $y_n=x_{n+1}-x_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n$

- Ta chứng minh dãy (y_n) tăng.

Ta có: $y_{n+1}-y_n=\dfrac{(n+1)^2+n+2}{(n+1)^3}.\dfrac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n-\dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n$

$=\dfrac{(n^2+3n+3)(n^2+1)-(n^2+n+1)(n^2+2n+1)}{n^3(n+1)^2}x_n$

$=\dfrac{2x_n}{n^3(n+1)^2}>0,\ \forall n=1,2,..$

- Ta chứng minh dãy (y_n) bị chặn.

Trước hết ta chứng minh: $x_n\le 4(n-1)$ (1) với $\forall n=2,3...$

* Với $n=2$, ta có: $x_2=4x_1=4$ nên (1) đúng với $n=2$

* Giả sử (1) đúng với n, tức là: $x_n\le 4(n-1)$, ta có

$$x_{n+1}=\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n\le\frac{4(n^4-1)}{n^3}<4n$$

Nên (1) đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra (1) đúng

Ta có: $y_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n\le\dfrac{4(n-1)(n^2+n+1)}{n^3}=\dfrac{4(n^3-1)}{n^3}<4$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 36: Cho dãy số (Un) với $Un=\dfrac{-n}{n+1}$.Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $\dfrac{-1}{2};\dfrac{-2}{3};\dfrac{-3}{4};\dfrac{-5}{5};\dfrac{-5}{6}$.

B. 5 số số hạng đầu của dãy là : $\dfrac{-1}{2};\dfrac{-2}{3};\dfrac{-3}{4};\dfrac{-4}{5};\dfrac{-5}{6}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Bị chặn trên bởi số 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Thay n lần lượt bằng $1,2,3,4,5$ ta được 5 số hạng đầu tiên là $\frac{-1}{2};\frac{-2}{3};\frac{-3}{4};\frac{-4}{5};\frac{-5}{6}$.

Câu 37: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{n^2+n}$.Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là: $\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{1}{20};\frac{1}{30}$;

B. Là dãy số tăng.

C. Bị chặn trên bởi số $M=\frac{1}{2}$.

D. Không bị chặn.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}-\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{-2}{n(n+1)(n+2)}<0$ với $n\ge 1$.

Do đó (u_n) là dãy giảm.

Câu 38: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{-1}{n}$.Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $-1;\frac{-1}{2};\frac{-1}{3};\frac{-1}{4};\frac{-1}{5}$.

B. Bị chặn trên bởi số $M=-1$.

C. Bị chặn trên bởi số $M=0$.

D. Là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi số m $M=-1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nhận xét : $u_n=\frac{-1}{n}\ge\frac{-1}{1}=-1$.

Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi $M=-1$.

Câu 39: Cho dãy số (u_n) với $u_n=a.3^n$ (a : hằng số).Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Dãy số có $u_{n+1}=a.3^{n+1}$.

B. Hiệu số $u_{n+1}-u_n=3.a$.

C. Với $a>0$ thì dãy số tăng

D. Với $a<0$ thì dãy số giảm.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $u_{n+1}-u_n=a.3^{n+1}-a.3^n=a.3^n(3-1)=2a.3^n$.

Câu 40: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{a-1}{n^2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Dãy số có $u_{n+1}=\frac{a-1}{n^2+1}$.

B. Dãy số có : $u_{n+1}=\frac{a-1}{(n+1)^2}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Là dãy số tăng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $u_{n+1}=\frac{a-1}{(n+1)^2}$.

Câu 41: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{a-1}{n^2}$ (a : hằng số). Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \dfrac{a-1}{(n+1)^2}$.

B. Hiệu $u_{n+1} - u_n = (1-a).\dfrac{2n-1}{(n+1)^2 n^2}$.

C. Hiệu $u_{n+1} - u_n = (a-1).\dfrac{2n-1}{(n+1)^2 n^2}$.

D. Dãy số tăng khi $a < 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (a-1).\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2}\right) = (a-1).\dfrac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} = (1-a).\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Câu 42: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an^2}{n+1}$ (a : hằng số). Kết quả nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$.

B. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a.(n^2+3n+1)}{(n+2)(n+1)}$.

C. Là dãy số luôn tăng với mọi a.

D. Là dãy số tăng với $a > 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Chọn $a = 0$ thì $u_n = 0$,dãy (u_n) không tăng, không giảm.

Câu 43: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{k}{3^n}$ (k : hằng số). Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ 5 của dãy số là $\dfrac{k}{3^5}$.

B. Số hạng thứ n của dãy số là $\dfrac{k}{3^{n+1}}$.

C. Là dãy số giảm khi $k > 0$.

D. Là dãy số tăng khi $k > 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Số hạng thứ n của dãy là $u_n = \dfrac{k}{3^n}$.

Câu 44: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

C. Đây là một dãy số giảm.

D. Bị chặn trên bởi số $M = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Dãy u_n là một dãy đan dấu.

Câu 45: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{n-1}$ với $n \in N^*$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. 5 số hạng đầu của dãy là: $0;1;\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5}$.

B. Số hạng $u_{n+1} = \sqrt{n}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Bị chặn dưới bởi số 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

5 số hạng đầu của dãy là $0;1;\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4}$.

Câu 45: Cho dãy số (u_n) có $u_n = -n^2 + n + 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. 5 số hạng đầu của dãy là: $-1;1;5;-5;-11;-19$.

B. $u_{n+1} = -n^2 + n + 2$.

C. $u_{n-1} - u_n = 1$.

D. Là một dãy số giảm.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có :

$u_{n+1} - u_n = \left[-(n+1)^2 + n + 1 + 1\right] - \left[-n^2 + n + 1\right] = -n^2 - 2n - 1 + n + 2 + n^2 - n - 1 = -2n < 0\ \forall n \geq 1$ Do đó (u_n) là một dãy số giảm.

Câu 46: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{-1}{n^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2+1}$.

B. $u_n > u_{n+1}$.

C. Đây là một dãy số tăng.

D. Bị chặn dưới.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Câu 47: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy: $u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{n+2}$

B. Dãy số bị chặn.

C. Đây là một dãy số tăng.

D. Dãy số không tăng không giảm.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Dãy số không tăng không giảm.