TỔNG ÔN SỐ PHỨC

LỜI GIẢI CHI TIẾT 50 CÂU TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC CHỌN LỌC TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA – 2017

CÁC CÔNG THỨC QUAN TRỌNG CẦN NẮM VỮNG

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$	$\overline{z_1}.\overline{z_2}=\overline{z_1.z_2}$	$\lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert=\lvert z_1.z_2\rvert$
$\frac{\overline{z_1}}{z_2}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$	$\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$	$z.\overline{z}=\lvert z\rvert^2$
$\lvert z_1.z_2\rvert^2=(z_1.z_2).\left(\overline{z_1.z_2}\right)$	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	$\mathrm{Re}(z)=\frac{z.\overline{z}}{2},\mathrm{Im}(z)-\frac{z-\overline{z}}{2}$
$\lvert z_1\rvert-\lvert z_2\rvert\le\lvert z_1-z_2\rvert\le\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$	$\lvert z_1\rvert-\lvert z_2\rvert\le\lvert z_1+z_2\rvert\le\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$	$-\lvert z\rvert\le\{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\}\le\lvert z\rvert$

45 CÂU TRẮC NGHIỆM + 5 CÂU VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Đặt $P=8(b^2-a^2)-12$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=(|z|-2)^2$ B. $P=(|z|^2-4)^2$ C. $P=(|z|-4)^2$ D. $P=(|z|^2-2)^2$

(THPT ĐẶNG THÚC HỨA-NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1.Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi\Rightarrow z^2+4=a^2-b^2+4+2abi.$

Khi đó, giả thiết $|z^2+4|=2|z|\Leftrightarrow\left(a^2-b^2+4\right)^2+4a^2b^2=4\left(a^2+b^2\right)$

$$\Leftrightarrow 8\left(b^2-a^2\right)=16-4\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+b^2\right)^2$$

$$\Rightarrow P=\left(a^2+b^2\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)+4=|z|^4-4|z|^2+4=\left(|z|^2-2\right)^2$$

Cách 2.Từ giả thiết, ta có $|z^2+4|^2=\left(2|z|\right)^2\Leftrightarrow\left(z^2+4\right)\left(\overline{z^2}+4\right)=4|z|^2=4z.\overline{z}$

$$\Leftrightarrow z^2.\overline{z^2}+4z^2+4\overline{z^2}+16=4z.\overline{z}\Leftrightarrow\left(z.\overline{z}\right)^2-4.z.\overline{z}+4=-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(z.\overline{z}-2\right)^2=-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)\Leftrightarrow-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)=\left(|z|^2-2\right)^2 \qquad (1)$$

Đặt $z = a + bi \to \overline{z} = a - bi \Rightarrow z^2 + \overline{z}^2 = 2\left(a^2 - b^2\right)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $P = 8(b^2 - a^2) - 12 = \left(|z|^2 - 2\right)^2$.**Chọn D**

Câu 2. Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right|$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(THPT ĐẶNG THÚC HỨA-NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1.Ta có $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow (z_1 + 2z_2)(z_1 + z_2) = z_1.z_2$

$\Leftrightarrow (z_1)^2 + 2.z_1.z_2 + 2(z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2.\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = i - 1$ hoặc $\frac{z_1}{z_2} = -1 - i$

Khi đó $P = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = |i-1| + \left|\frac{1}{i-1}\right| = |i-1| + \frac{1}{|i-1|} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Cách 2. Chọn $z_1 = i \Rightarrow \frac{2}{i} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{i + z_2} \Rightarrow z_2 = \frac{1-i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D**

Câu 3. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz - (3i+1).\overline{z}}{1+i} = |z|^2$. Số phức $w = \frac{26}{9} iz$ có môđun là

A.9 B. $\sqrt{26}$ C. $\sqrt{6}$ D. 5

(THPT PHẠM HỒNG THÁI-HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$,khi đó giả thiết $\Leftrightarrow i(x + yi) - (3i+1)(x - yi) = (1+i)(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow xi - y - 3xi - 3y - x + yi = -x - 4y + (y - 2x)i = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)i.$

$\Rightarrow \begin{cases} -x - 4y = x^2 + y^2 & (1) \\ -2x + y = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$ .Lấy (1) – (2), ta được $-x - 4y - (-2x + y) = 0 \Leftrightarrow x = 5y.$

Thế $x = 5y$ vào phương trình (1), ta có $26y^2 = -9y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\frac{9}{16} \Rightarrow x = -\frac{45}{26} \end{array}\right.$

Vậy $z=x+yi=-\frac{45}{26}-\frac{9}{26}i\Rightarrow |w|=\left|\frac{26}{9}i\left(-\frac{45}{26}-\frac{9}{26}i\right)\right|=|1-5i|=\sqrt{26}$.**Chọn B**

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+i|+|z-2-i|$

A. $\max T=8\sqrt{2}$ B. $\max T=4$ C. $\max T=4\sqrt{2}$ D. $\max T=8$

(THPT CHU VĂN AN – HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$, ta có $|z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |x-1+yi|=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+1 \quad (*)$

Lại có $T=|z+i|+|z-2-i|=|x+(y+1)i|+|x-2+(y-1)i|$

$=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$

Kết hợp với (*), ta được $T=\sqrt{2x+2y+2}+\sqrt{6-2x-2y}=\sqrt{2(x+y)+2}+\sqrt{2-2(x+y)}$

Đặt $t=x+y$, khi đó $T=f(t)=\sqrt{2t+2}+\sqrt{6-2t}$ với $t\in[-1;1]$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+2}}-\frac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow f(t)_{\max}=f(1)=4$ **Chọn B**

Câu 5. Tìm môđun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

A. $|z|=1$ B. $|z|=4$ C. $|z|=2$ D. $|z|=\frac{1}{2}$

(SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH)

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $z-4=|z|+i|z|-4i-3zi\Leftrightarrow z(1+3i)=|z|+4+(|z|-4)i$ (*)

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $|z(1+3i)|=\left||z|+4+(|z|-4)i\right|$

$\Leftrightarrow |z|.|1+3i|=\sqrt{(|z|+4)^2}\Leftrightarrow |z|\sqrt{10}=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}$

$\Leftrightarrow 10|z|^2=(|z|+4)^2+(|z|-4)^2\Leftrightarrow 8|z|^2=32\Leftrightarrow |z|^2=4\Rightarrow |z|=2$ **Chọn C**

Cách 2. Ta biến đổi $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i\Leftrightarrow z=\frac{(1+i)|z|-4i+4}{1+3i}$

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z|=1\to z=\dfrac{1+i-4i+4}{1+3i}=\dfrac{5-3i}{1+3i}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{5}i\Rightarrow|z|=\dfrac{\sqrt{85}}{5}\neq 1$ (loại)
- $|z|=4\to z=\dfrac{4(1+i)-4i+4}{1+3i}=\dfrac{8}{1+3i}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{5}i\Rightarrow|z|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\neq 1$ (loại)
- $|z|=2\to z=\dfrac{2(1+i)-4i+4}{1+3i}=\dfrac{6-2i}{1+3i}=-2i\Rightarrow|z|=2$ (chọn)

Câu 6. Cho số phức $z\neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w=\dfrac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính giá trị biểu thức $\dfrac{|z|}{1+|z|^2}$

A. $\dfrac{1}{5}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. 2 D. $\dfrac{1}{3}$

(THPT CHUYÊN QUỐC HỌC - HUẾ)

Lời giải

Cách 1. Tư duy nhanh. w là số thực $\to\dfrac{1}{w}$ là số thực $\to z+\dfrac{1}{z}$ là số thực.

Mà dễ thấy $z+\bar{z}$ là số thực nên $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow\bar{z}.z=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$

Cách 2. Ta có biến đổi $\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}\Leftrightarrow z+z.\bar{z}^2=\bar{z}+\bar{z}.z^2\Leftrightarrow z-\bar{z}=\left(z-\bar{z}\right).z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-\bar{z}=0\\ z.\bar{z}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow z.\bar{z}=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$

Cách 3. Chọn $w=\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(z-1)^2=0\Leftrightarrow z=1\Rightarrow|z|=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$ **Chọn B**

Câu 7. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M,M' .Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N,N' .Biết rằng $M,M'\ N,N'$ là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

(THPT CHUYÊN LÀO CAI)

Lời giải

Gọi $M(x;y) \to M'(x;-y)$ và $(4+3i)z = 4x-3y+(3x+4y)i \Rightarrow \begin{cases} N(4x-3y;3x+4y) \\ N'(4x-3y;-3x-4y) \end{cases}$

Dễ thấy $MM' \parallel NN'$ vì cùng vuông góc với Ox nên để $MM'N'N$ là hình chữ nhật.

Khi và chỉ khi $\begin{cases} MM' = NN' \\ MN = M'N' \\ MN \parallel Ox \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow z = x - xi \Rightarrow |z+4i-5| = \sqrt{(x-5)^2+(x-4)^2}$

Ta có $(x-5)^2+(x-4)^2 = \frac{1}{2}(2x-9)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |z+4i-5|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Chọn C**

Câu 8. Tính môđun của số phức z ,biết $\frac{|z|^2}{z}+iz+\frac{z-i}{1-i}=0$

A. 2
B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{1}{9}$

(THPT YÊN MÔ A-NINH BÌNH)

Lời giải

Dễ thấy $z.\bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$, khi đó giả thiết $\Leftrightarrow iz+\bar{z}+\frac{z-i}{1-i}=0 \Leftrightarrow iz+\bar{z}+\frac{(1+i)(z-i)}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2iz+2\bar{z}+z-i+iz-i^2=0 \Leftrightarrow (3i+1)z+\bar{z}=i-1 \quad (*)$

Đặt $z = x+yi \ (x,y\in\mathbb{R})$ suy ra $\bar{z} = x-yi$, do đó $(*) \Leftrightarrow (3i+1)(x+yi)+x-yi=i-1$

$\Leftrightarrow 3xi-3y+x+yi+x-yi=i-1 \Leftrightarrow 2x-3y+3xi=i-1 \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ 2x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $z=\frac{i}{3} \Rightarrow |z| = \left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3}$ **Chọn C**

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z}-2+i$ .Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2.$
B. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$
C. $|z|>2$
D. $|z|<\frac{1}{2}$

(THPT NHÂN CHÍNH- HÀ NỘI)

Lời giải

Cách 1.Từ giả thiết, ta có $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)|z|+2-i = \frac{\sqrt{10}}{z}$

$\Leftrightarrow |z|+2|z|i+2-i=\dfrac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow |z|+2+(2|z|-1)i=\dfrac{10}{z}$ (*)

Lấy môđun hai vế của (*), ta được(*)$\Leftrightarrow \sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}$

Đặt $t=|z|$, ta có $\sqrt{(t+2)^2+(2t-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{t} \Leftrightarrow t^2(5t^2+5)=10 \Leftrightarrow t^4+t^2-2=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy môđun của số phức z bằng $1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$

Cách 2. Sử dụng máy tính casio (hướng dẫn chi tiết ở câu 26)để tìm $|z|$

Cách 3. Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ và $c=|z|$, thay vào đẳng thức đã cho thì

$Gt \Leftrightarrow (1+2i)c=\dfrac{\sqrt{10}}{a+bi}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)c=\dfrac{(a-bi)\sqrt{10}}{c^2}-2+i$

$\Leftrightarrow c-\dfrac{a\sqrt{10}}{c^2}+2+i\left(2c+\dfrac{b\sqrt{10}}{c^2}-1\right)=0$

Suy ra $\begin{cases} c-\dfrac{a\sqrt{10}}{c^2}+2=0 \\ 2c+\dfrac{b\sqrt{10}}{c^2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+2=\dfrac{a\sqrt{10}}{c^2} \\ 1-2c=\dfrac{b\sqrt{10}}{c} \end{cases}$ nên $(c+2)^2+(1+2c)^2=\dfrac{10(a^2+b^2)}{c^4}=\dfrac{10}{c^2}$

Giải ra ta có $c=\pm 1$ mà $c>0$ nên $c=1$ hay $|z|=1$ .Do đó $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ **Chọn B**

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=3$ .Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là :

A.3 B.$\sqrt{5}$ C.$\sqrt{13}$ D.5

(TOÁN HỌC& TUỔI TRẺ LẦN 8)

Lời giải

Ta có $a=\left|z+\dfrac{1}{z}\right| \Leftrightarrow a^2=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$

$=|z|^2+\dfrac{z^2+(\bar{z})^2}{|z|^2}+\dfrac{1}{|z|^2}=\dfrac{|z|^4+(z+\bar{z})^2-2|z|^2+1}{|z|^2}$

Khi đó $|z|^4-|z|^2.(a^2+2)+1=-(z+\bar{z})^2\le 0\Rightarrow |z|\in\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2};\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$

Vậy $\max|z|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2};\min|z|=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\Rightarrow M+m=\sqrt{a^2+4}=\sqrt{13}$ **Chọn C**.

Câu 11. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$ .Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$ B. $|z|>2$ C. $|z|<\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$

(TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ LẦN 8)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức số phức, ta có, $|u+v|\ge|u|+|v|\ge|u-v|$

Khi đó $2\sqrt{2}\ge 2|z-1|+3|z-i|=2(|z-1|+|z-i|)+|z-i|\ge 2|z-1-(z-i)|+|z-i|$

$\Rightarrow 2|i-1|+|z-i|=2\sqrt{2}+|z-i|\Leftrightarrow |z-i|\le 0\Rightarrow z=i\Rightarrow |z|=1$

Cách 2. Sử dụng hình học, giả sử điểm $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$

Số phức $z-1$ có điểm biểu diễn là $A(x-1;y)$, $z-1$ có điểm biểu diễn là $B(x;y-1)$

Ta có $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2.OA+3.OB\le 2.AB$ (1) vì $\overline{AB}(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$

Mặt khác $2.OA+3.OB=2.(OA+OB)+OB\ge 2.AB+OB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $2.AB\ge 2.AB+OB\Leftrightarrow OB\le 0\Rightarrow OB=0\Rightarrow 0\equiv B(0;0)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow z=i$

Vậy môđun của số phức z là $|z|=|i|=1$ **Chọn D**

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với số phức $w=z-2+2i$

A. $\min|w|=\frac{3}{2}$ B. $\min|w|=2$ C. $\min|w|=1$ D. $\min|w|=\frac{1}{2}$

(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH- ĐỒNG NAI)

Lời giải

Ta có $z^2-2z+5=(z-1)^2+4=(z-1)^2-(2i)^2=(z-1+2i)(z-1-2i)$

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1-2i\\|z-1-2i|=|z+3i-1|\end{array}\right.$

TH1. Với $z=1-2i$, ta có $w=z-2+2i=1-2i-2+2i=-1\Rightarrow |w|=1$

Th2. Với $|z-1-2i|=|z+31-1|$ (*) ,đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$$(*)\Leftrightarrow |x-1+(y-2)i|=|x-1+(y-3)i|\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$$

Do đó $w=z-2+2i=x-\frac{1}{2}i-2+2i=x-2+\frac{3}{2}i\Rightarrow |w|=\sqrt{(x-2)^2+\frac{9}{4}}\geq\frac{3}{2}$ **Chọn A**

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$

A. $\max T=2\sqrt{5}$ B. $\max T=2\sqrt{10}$ C. $\max T=3\sqrt{5}$ D. $\max T=3\sqrt{2}$

(THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ - HÀ NỘI)

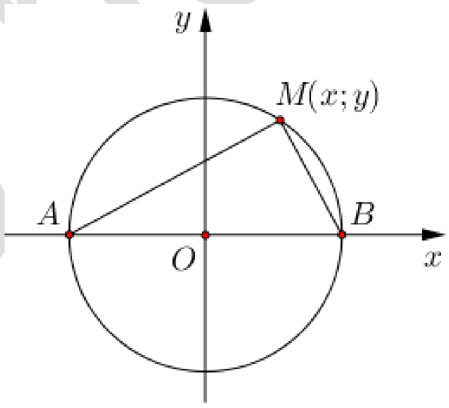
Lời giải

Cách 1. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow M(x;y)$

Và $A(-1;0),B(1;0)$. Ta có $|z|=1\Rightarrow |x+yi|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB .

$\Rightarrow MA^2+MB^2=AB^2=4$ .Khi đó, theo Bunhiacopxki, ta có



$$T=MA+2MB\leq\sqrt{(1^2+2^2)(MA^2+MB^2)}=\sqrt{5.4}=2\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T=2\sqrt{5}$. **Chọn A**

Cách 2. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow |z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ và $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Mặt khác $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$,khi đó

$$T=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\leq\sqrt{(1^2+2^2)\left[(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2\right]}$$

$$\sqrt{10(x^2+y^2+1)}=\sqrt{10.2}=2\sqrt{5}\Rightarrow\max T=2\sqrt{5}$$

Câu 14. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $P=\sqrt{2}$ C. $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $P=\sqrt{3}$

(THPT THANH CHƯƠNG I - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$,ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y-1)i| = |2 - y + xi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = \sqrt{(2-y)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 - 4y + 1 = 4 - 4y + y^2 + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$ .Sử dụng công thức (chứng minh ở câu 16)

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2\right)} = \sqrt{3}$ **Chọn D**

Câu 15. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .Tính giá trị biểu thức $A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2$

A.1 B.0 C.-1 D.$1+i$

(THPT CHUYÊN BIÊN HÒA-HÀ NAM)

Lời giải

Ta có $A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$

$= -2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -2z_1z_2z_3\left(\frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} + \frac{|z_3|}{z_3}\right) = -z_1z_2z_3\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$

Mặt khác $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$ suy ra $A = 0$ **Chọn B**

Câu 16. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$ .Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$ B. $P = 2\sqrt{26}$ C. $P = 4\sqrt{6}$ D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

- Bổ đề. Cho hai số phức z_1 và z_2, ta luôn có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ (*)

Chứng minh.Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$ và $z.\overline{z} = |z|^2$ Khi đó

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) + (z_1 - z_2)\left(\overline{z1} - \overline{z_2}\right)$

$= z_1.\overline{z_1} + z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2} + z_1.\overline{z_1} - z_1.\overline{z_2} - \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2}$

$= 2\left(z_1.\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2}\right) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \rightarrow$ ***đpcm.***

- Áp dụng (*), ta được $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4 \Rightarrow |z_1-z_2|^2=4-(\sqrt{3})^2=1 \Rightarrow |z_1-z_2|=1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $P=|z_1|+|z_2| \le \sqrt{\left(2|z_1|^2+|z_2|^2\right)}=2\sqrt{26}$ **Chọn B**

Câu 17. Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z)=0$ thì

A. $P\left(|z|\right)=0$ B. $P\left(\frac{1}{z}\right)=0$ C. $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=0$ D. $P\left(\bar{z}\right)=0$

(THPT CHUYÊN TỈNH HÀ NAM)

Lời giải

Chọn hàm số $P(z)=z^2-2z+5$ .Phương trình $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i \end{array}\right.$

Xét với số phức $z=1+2i$, ta có

- $|z|=|1+2i|=\sqrt{5}$ suy ra $P\left(|z|\right)=|z^2|-2|z|+5=\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}+5=10-2\sqrt{5}\ne 0.$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+2i}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+5=\frac{112}{25}+\frac{16}{25}i\ne 0$
- $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{1-2i}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{\bar{z}^2}-\frac{2}{\bar{z}}+5=\frac{112}{25}-\frac{16}{25}i\ne 0$
- $\bar{z}=1-2i$ suy ra $P=\left(\bar{z}\right)=\bar{z}^2-2\bar{z}+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=0$ **Chọn D**

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 1$.Đặt $A=\frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $|A|\le 1$ B. $|A|\ge 1$ C. $|A|<1$ D. $|A|>1$

(THPT CHUYÊN HÀ NAM)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $A=\frac{2z-i}{2+iz} \Leftrightarrow A(2+iz)=2z-i \Leftrightarrow 2A+Azi=2z-i$

$\Leftrightarrow 2A+i=z(Ai-2) \Leftrightarrow z=\frac{2A+i}{Ai-2}$ .Mà $|z|\le 1 \Rightarrow \left|\frac{2A+i}{Ai-2}\right|\le 1 \Leftrightarrow |2A+i|\le|Ai-2|$ (*)

Đặt $A=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó (*) $\Leftrightarrow |2x+(2y+1)i|\le|-y-2+xi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+(2y+1)}\le\sqrt{(y+2)^2+x^2} \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4y+1\le x^2+y^2+4y+4 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 1$

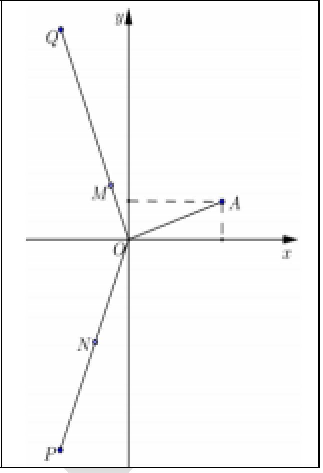
Vậy môđun của $A=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ **Chọn A**

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w=\frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M,N,P,Q .Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

A.Điểm Q B.Điểm M

C.Điểm N D.Điểm P

(THPT CHUYÊN ĐH VINH LẦN 1)



Lời giải

Đặt $z=x+yi(x,y>0)$,khi đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}$ và $x>y$ (hình vẽ)

Ta có $w=\frac{1}{iz}=-\frac{i}{x+yi}=-\frac{i(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}=-\frac{y+xi}{x^2+y^2}=-2y-2xi$

Vì $x,y>0$ nên điểm biểu diễn số phức w là $(-2y;-2x)$ đều có hoành độ, tung độ âm.

Đồng thời $x>y\Leftrightarrow -2y>-2x\Rightarrow x_w<y_w<0$ và $|w|=2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}=2|z|$

Dựa vào hình vẽ, điểm P chính là điểm cần tìm vì điểm N tuy thỏa mãn $x_w<y_w<0$ nhưng độ dài ON xấp xỉ bằng độ dài OA . **Chọn D**

Câu 20. Cho số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-6+8i|=5$ và có môđun nhỏ nhất. Tính tổng $x+y$

A. $x+y=-3$ B. $x+y=-1$ C. $x+y=1$ D. $x+y=2$

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM)

Lời giải

Dựa vào ví dụ, ta phát triển dạng toán Min-Max số phức như sau

Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa điều kiện $|z-(a+bi)|=R$ $(R>0)$ là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

Chứng minh. Gọi $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$

Theo giả thiết $|z-(a+bi)|=R\Leftrightarrow |(x-a)+(y+b)i|=R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Vậy tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

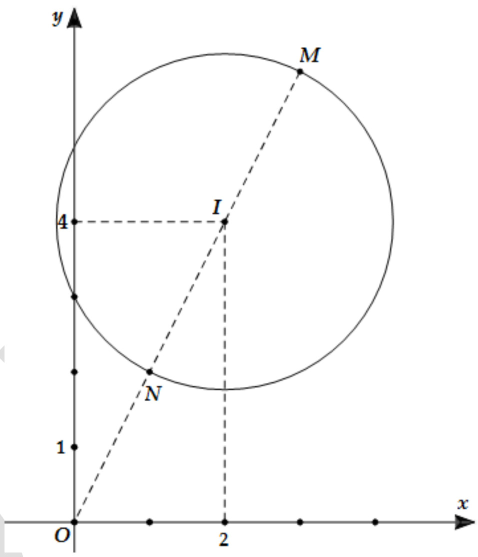
Ví dụ 21. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=\sqrt{5}$ .Tìm $\max|z|$

A. $\max|z|=3\sqrt{5}$ B. $\max|z|=5$ C. $\max|z|=\sqrt{5}$ D. $\max|z|=\sqrt{13}$

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Vậy $\max|z|=OM=OI+R=\sqrt{2^2+4^2}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ **Chọn A.**



***Hỏi thêm:**

a) Tìm $\min|z|$

$\min|z|=ON=OI-R=\sqrt{2^2+4^2}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

b) Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng OI là $y=2x$.

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 5x^2-20x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$$

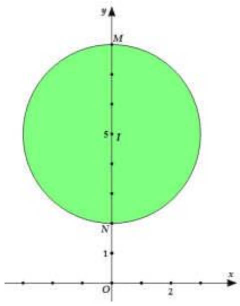
Số phức z có môđun lớn nhất là $z=3+6i$ tương ứng với điểm $M(3;6)$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=1+2i$ tương ứng với điểm $N(1;2)$

Ví dụ 22. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5i|\le 3$ .Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?

A.0 B.3 C.2 D.4

Hướng dẫn giải



Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(0;5)$

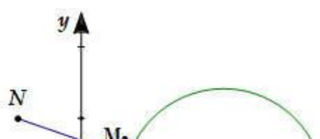
và bán kính $R=3$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=2i$ ứng với điểm $N(0;2)$.**Chọn C**

Tổng quát. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=r_1$ $(r_1>0)$ .Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$

Gọi $I(z_1);N(z_2)$ và $M(z)$ .Tính $IN=|z_1-z_2|=r_2$

Khi đó, $\max P=NM_1=r_1+r_2$ và $\min P=NM_2=|r_1-r_2|$



Áp dụng

Câu 1.(THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 1) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$. Tìm $\max|z|$

A. $\max|z|=1$ B. $\max|z|=2$ C. $\max|z|=7$ D. $\max|z|=6$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1+i|\left|z+\dfrac{1-7i}{1+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|z-(3+4i)\right|=1$

Vì $\left|(3+4i)-0\right|=5$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+5=6$. **Chọn D**

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$

A. $\max|z|=1$ B. $\max|z|=2$ C. $\max|z|=\sqrt{2}$ D. $\max|z|=3$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1\Leftrightarrow|-iz+1|=1\Leftrightarrow|-i|.\left|z+\dfrac{1}{-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-(-i)|=1$

Vì $\left|(-i)-0\right|=1$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+1=2$ **Chọn B**

Câu 3. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ .Biết rằng số phức $z=x+yi$,$(x,y\in\mathbb{R})$ có môđun nhỏ nhất. Tính $P=x^2+y^2$

A. $P=10$ B. $P=8$ C. $P=16$ D. $P=26$

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ .Ta có $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow|(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=x^2+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16=0\Leftrightarrow y=4-x$

Do đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=2$ .Vậy $P=2^2+2^2=8$. **Chọn B**

Câu 4. (ĐỀ THTT LẦN 5 – 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$ .Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A.10 và 4 B. 5 và 4 C. 4 và 3 D. 5 và 3

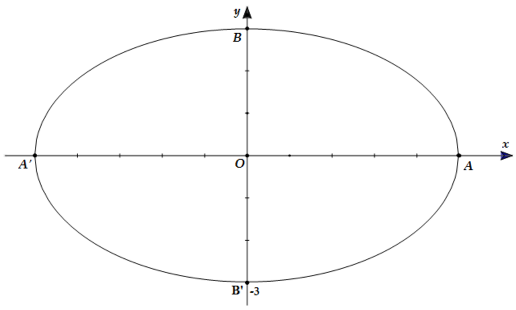
Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.Theo giả thiết, ta có $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |(x-4)+yi|+|(x+4)+yi|=10\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$ (*)

Gọi $M(x;y),\ F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$ nên tập hợp các điểm $M(z)$ là đường elip (E) .



Ta có $c=4; 2a=10\Leftrightarrow a=5$ và $b^2=a^2-c^2=9$

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Vậy $\max|z|=OA=OA'=5$ và $\min|z|=OB=OB'=3$. **Chọn D**

Câu 5. Biết sốphức $z=x+yi$,$(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thờiđiều kiện $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{33}$ B. $|z|=50$ C. $|z|=\sqrt{10}$ D. $|z|=5\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Ta có $P=|(x+2)^2+yi|^2-|x+(y-1)i|^2=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]$

$=4x+2y+3\Leftrightarrow 4x+2y+3-P=0\ (\Delta)$.

Ta tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung $\Rightarrow d(I;\Delta)\leq R$

$$\Leftrightarrow\frac{|12+8+3-P|}{\sqrt{20}}\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow|23-P|\leq 10\Leftrightarrow -10\leq 23-P\leq 10\Leftrightarrow 13\leq P\leq 33.$$

Do đó $\max P = 33$ .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-30=0 \\ (x-3)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}$

Vậy $|z| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.**Chọn D**

Câu 23. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãnđiềukiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

A. $P = 1-i$ B. $P = -1-i$ C. $P = -1$ D. $P = 1+i$

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = 1$

Đặt $w = \frac{z_1}{z_2} = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$,khi đó $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Khi đó $P = w^2 + \frac{1}{w} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1$.**Chọn C.**

Câu 24. Tính tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn $|2z-1| = |\overline{z}+1+i|$, đồng thời điểm biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

A. $\sqrt{5}$ B.3 C. $3\sqrt{5}$ D.1

(SỞ GD&ĐT THANH HÓA)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, khi đó $|2z-1| = |\overline{z}+1+i| \Leftrightarrow |2x-1+2yi| = |x+1-(y-1)i|$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + 4y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-6x+2y-1=0$ (1)

Mà điểm biểu diễn $M_{(z)} \in (C): (x-1)^2+(y-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$ (2)

Lấy (1) - 3.(2), ta được $3x^2+3y^2-6x+2y-1-3x^2-3y^2+6x+6y+9=0 \Leftrightarrow y=-1$

Thế $y=-1$ vào phương trình (2), ta có:

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-i \\ z_2=2-i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|.|z_2| = |-i|.|2-i| = \sqrt{5}$ **Chọn C**

Câu 25. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z+2-2i| = |z-4i|$, $w = iz+1$ .Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|w|$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$	B. $2\sqrt{2}$	C. 2	D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 2)

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, khi đó $z+2-2i=a+2+(b-2)i$ và $z-4i=a+(b-4)i$

Nên ta có $(a+2)^2+(b-2)^2=a^2+(b-4)^2 \Leftrightarrow a+b=2 \Leftrightarrow b=2-a$

Khi đó $w=iz+1=(a+bi)i+1=1-b+ai \Rightarrow |w|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{a^2+(a-1)^2}$

Dễ thấy $a^2+(a-1)^2=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow |w|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \min_{|w|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A**

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$

Tính giá trị của biểu thức : $P=z_1^{2017}+z_2^{2017}$

A. $P=1$	B. $P=-1$	C. $P=0$	D. $P=2$

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

Ta có $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z^3=1\Rightarrow z=1\Rightarrow P=(z_1)^{2017}+(z_2)^{2017}=2$. **Chọn D**

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z-(1+2i)\bar{z}=7-i$ .Tìm môđun của z

A. $|z|=\sqrt{5}$	B. $|z|=1$	C. $|z|=\sqrt{3}$	D. $|z|=2$

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

Cách 1. Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, khi đó giả thiết trở thành

$$Gt \Leftrightarrow (2+3i)(a+bi)-(1+2i)(a-bi)=7-i$$

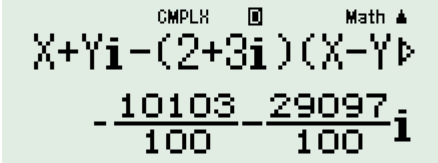
$$\Leftrightarrow a-5b+(a+3b)i=7-i \Leftrightarrow \begin{cases} a-5b=7 \\ a+3b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow z=2-i \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$$

Cách 2. Xử lý bằng casio giống bài toán sau : Cho số phức $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$ .Tích phần thực và phần ảo của số phức z bằng

A. 2	B. -1	C.1	D.-2

Đặt $z=X+Yi \to \bar{z}=X-Yi$. Khi đó $w=X+Yi-(2+3i)(X-Yi)-1+9i=0$ (*)

Thao tác trên máy tính	Màn hình hiển thị
Ấn `w` → `2` → Đưa về tính số phức. Nhập vế trá của phương trình (*) $X+Yi\boxed{-(2+3i)(X-Yi)-1+9i}$	
Sau đó, gán giá trị $X=100, Y=0,01$ Ấn `r` → `100` → `r` → `0` → `q` → `0.01` → `=`	

Khi đó $w=-\dfrac{10103}{100}-\dfrac{29097}{100}i=-101,03-290,97i$

Mặt khác, ta có $\begin{cases}101,03=100+1+0,03=X+3Y+1\\290,97=300-9-0,03=3X-3Y-9\end{cases}$

$\Rightarrow w=-(X+3Y+1)-(3X-3Y-9)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}X+3Y=-1\\X-Y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=2\\Y=-1\end{cases}$

Câu 28. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời điều kiện $\left|z.\overline{z}+z\right|=2$ và $|z|=2$?

A. 2 B.4 C.3 D.1

(THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA)

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi\Rightarrow z.\overline{z}=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow\begin{cases}\left|a^2+b^2+a+bi\right|=2\\|a+bi|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\|a+4+bi|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\(a+4)^2+b^2=4\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+b^2=4\\(a+4)^2-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=0\end{cases}\Rightarrow z=-2$ **Chọn D**

Câu 29. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính $T=|z_1|+|z_2|$

A. $T=2\sqrt{13}$ B. $T=\dfrac{2\sqrt{97}}{3}$ C. $T=\dfrac{2\sqrt{85}}{3}$ D. $T=4\sqrt{13}$

(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ)

Lời giải

Đặt $w=m+ni\,(m,n\in\mathbb{R})\Rightarrow\begin{cases}z_1=w+2i=m+(n+2)i\\z_2=2w-3=2m-3+2ni\end{cases}$

Ta có $z_1+z_2=3m-3+(3n+2)i=-a$ là số thực $\Rightarrow\begin{cases}3n+2=0\\3m-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-\dfrac{2}{3}\\m\neq 1\end{cases}$

Lại có $z_1.z_2=\left(m+\frac{4}{3}i\right)\left(2m-3+\frac{4}{3}i\right)=b$ là số thực $\Rightarrow\frac{4}{3}.(2m-3)-\frac{4}{3}m=0\Rightarrow m=3$

Do đó $z_1=3+\frac{4}{3}i; z_2=3-\frac{4}{3}i\Rightarrow T=|z_1|+|z_2|=\frac{2\sqrt{97}}{3}$ **Chọn B**

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\overline{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng

A. 5π B. $\frac{5\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{2}$ D. 25π

(THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM-QUẢNG NAM)

Lời giải

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow(z+1)(\overline{z}-2i)=x^2+y^2+x+2y-(2x+y+2)i$

Theo giả thiết $(z+1)(\overline{z}-2i)$ là số thuần ảo, suy ra

$$\begin{cases}2x+y+2\neq 0\\ x^2+y^2+2+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+2y+1=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng $\frac{5\pi}{4}$. **Chọn B**

Câu 31. Mọi M là điểm biểu diễn số phức $w=\frac{z-\overline{z}+1}{z^2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z+2i)=2-i+3z$. Gọi N là trung điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}=2\varphi\right)$ trong đó $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia $\overrightarrow{OM}$.Điểm N nằm trong góc phần tư nào ?

A. Góc phần tư thứ (I) B.Góc phần tư thứ (IV)

C.Góc phần tư thứ (III) D.Góc phần tư thứ (II)

(THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU - ĐỒNG THÁP)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $(1-i)(z+2i)=2-i+3z\Leftrightarrow z+2i-iz+2=2-i+3z$

$\Leftrightarrow(i+2)z=3i\Leftrightarrow z=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\Rightarrow w=\frac{z-\overline{z}+1}{z^2}\xrightarrow{casio}w=\frac{33}{45}-\frac{56}{45}i$

Sử dụng lý thuyết nếu $z=x+yi\to P(x;y)\to\tan\varphi=\frac{y}{x}$ với φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành với vectơ $\overrightarrow{OM}$

Khi đó $w=\frac{33}{45}-\frac{56}{45}i\Rightarrow\tan\varphi=-\frac{56}{33}\Rightarrow\sin 2\varphi=-\frac{3696}{4225};\cos 2\varphi=-\frac{2047}{4225}$

Vậy điểm N thuộc góc phần tư thứ (IV). **Chọn B**

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$ .Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là

A. $\sqrt{13}+2$ B.4 C.6 D. $\sqrt{13}+1$

(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$, ta có $|z-2-3i|=1\Leftrightarrow|(a-2)+(b-3)i|=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=1\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-3)^2=1$ (*)

Đặt $\begin{cases}a-2=\sin t\\ b-3=\cos t\end{cases}$ (vì (*) $\Leftrightarrow\sin^2 t+\cos^2 t=1$). Khi đó $|\overline{z}+1+i|=|(a+1)+(1-b)i|$

$=\sqrt{(a+1)^2+(1-b)^2}\rightarrow$ xét biểu thức $P=(a+1)^2+(1-b)^2$

Ta có $(a+1)^2+(1-b)^2=(\sin t+3)^2+(\cos t+2)^2=\sin^2 t+6\sin t+9+\cos^2 t+4\cos t+4$

$=(\sin^2 t+\cos^2 t)+13+6\sin t+4\cos t$

$=14+6\sin t+4\cos t=P$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $(6\sin t+4\cos t)^2\le(6^2+4^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)$

$\Leftrightarrow(6\sin t+4\cos t)^2\le52\Leftrightarrow6\sin t+4\cos t\le\sqrt{52}=2\sqrt{13}\Rightarrow P\le14+2\sqrt{13}$

Vậy $|\overline{z}+1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(1-b)^2}\le\sqrt{14+2\sqrt{13}}=\sqrt{(\sqrt{13}+1)^2}=\sqrt{13}+1$ **Chọn A**

Câu 33. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-i|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 3 B.1 C.4 D.2

(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,khi đó $|z-i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2$ (*)

Ta có $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ là số thuần ảo nên $\begin{cases}x^2-y^2=0\\ 2xy\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\ne0\\ x=-y\ne0\end{array}\right.$

TH1. Với $x=y$,thế vào (*), ta được $x^2+(x-1)^2=2\Leftrightarrow2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

TH2. Với $x=-y$, thế vào (*), ta được $x^2+(x+1)^2=2\Leftrightarrow2x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán .**Chọn C**

Câu 34. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0; z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$ .Tính giá trị biểu thức $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(THPT CHUYỄN QUANG TRUNG)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{1}{z_1+z_2} = \frac{2z_1+z_2}{z_1z_2} \Leftrightarrow z_1z_2 = (2z_1+z_2)(z_1+z_2)$

$\Leftrightarrow z_1z_2 = 2z_1^2 + 2z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A**

Câu 35. Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 3i$ .Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó

A. $I(-1;-2), R = \sqrt{5}$ B. $I(1;2), R = \sqrt{5}$ C. $I(-1;2), R = 5$ D. $I = (1;-2), R = 5$

(THPT CHUYÊN QUANG TRUNG)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $(2+i)|z| - 1 + 3i = \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow (2|z|-1) + (|z|+3)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$ (*)

Lấy môđun hai vế (*), ta được $\sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+3)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|} \Rightarrow |z| = 1$

Lại có $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow w + 1 - 2i = (3-4i)z \Leftrightarrow |w+1-2i| = |(3-4i)z|$

$\Leftrightarrow |w+1-2i| = |3-4i|.|z| = 5|z| = 5 \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R = 5$. **Chọn C**

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $(\bar{z})\left[(3+4i)|z| - 4 + 3i\right] - 5\sqrt{2} = 0$. Giá trị của $|\bar{z}|$ là

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D.1

Cách 1.Đặt $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$, dựa vào giả thiết tìm nghiệm x, y

Cách 2. Ta có, giả thiết $\Leftrightarrow (3+4i)|z|-4+3i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\bar{z}} \Leftrightarrow (3|z|-4)+(4|z|+3)i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\bar{z}}$

Lấy môđun hai vế, ta được $\sqrt{(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{|\bar{z}|}$ mà $|z|=|\bar{z}|$, khi đó

$(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2=\dfrac{50}{|z|^2} \rightarrow$ đến đây có thể giải trực tiếp bằng cách đặt $t=|z|$

Hoặc sử dụng máy tính casio bằng việc thử các đáp án, đến thấy được $|z|=1$

Cách 3. Ta có biến đổi

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z|=2 \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).4+(3i-4).2}{5\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}+\dfrac{11\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z|=\sqrt{10}$ (loại)
- $|z|=\sqrt{2} \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).4+(3i-4).\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{-4+3\sqrt{2}}{5}+\dfrac{3+4\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z|=\sqrt{3}$ (loại)
- $|z|=2\sqrt{2} \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).8+(3i-4).2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow |z|=6$ (loại)
- $|z|=1 \Rightarrow |z|=2 \rightarrow z=\dfrac{3+4i+3i-4}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}+\dfrac{7\sqrt{2}}{10}i \Rightarrow |z|=1$ (chọn) .**Chọn D**

Câu 37 : Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích bằng
A. $S=9\pi$ B. $S=12\pi$ C. $S=16\pi$ D. $S=25\pi$
(THPT TRẦN HƯNG ĐẠO- NINH BÌNH)

Lời giải

Cách 1.Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $x+yi=2z+1-i \Leftrightarrow 2z=x-1+(y+1)i$ (1)

Từ giả thiết, ta thấy rằng $|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow |2|.|z-3+4i|\le 4 \Leftrightarrow |2z-6+8i|\le 4$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $|x-1+(y+1)i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |x-7+(y+9)i|\le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2+(y+9)^2}\le 4 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S=\pi R^2=16\pi$

Cách 2. Ta có $w=2z+1-i \Leftrightarrow \dfrac{w-1+i}{2}=z \Leftrightarrow \dfrac{w-1+i}{2}-3+4i=z-3+4i$

$\Leftrightarrow \dfrac{w-7+9i}{2} = z-3+4i \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-7+9i}{2}\right| = |z-3+4i| \Leftrightarrow \dfrac{|w-7+9i|}{2} \le 2 \Leftrightarrow |w-7+9i| \le 4$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S16\pi$.**Chọn C**

Câu 38. Biết số phức $z = x+yi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$ đồng thời có môđun nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $M = x^2+y^2$

A. $M=8$ B. $M=10$ C. $M=16$ D. $M=26$

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z = x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $z-2-4i = x-2+(y-4)i$ và $z-2i = x+(y-2)i$

Mặt khác $|z-2-4i| = |z-2i|$ nên suy ra $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y+20 = x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$

Khi đó $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = \sqrt{2x^2-8x+16} = \sqrt{2(x-2)^2+8} \ge 2\sqrt{2}$

Vậy môđun nhỏ nhất của z là $2\sqrt{2}$. Xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow M=8$ **Chọn A**

Câu 39.Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z-\bar{z}| \le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H

A. 3π B. $\dfrac{3\pi}{4}$ C. $\dfrac{3\pi}{2}$ D. 6π

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z = x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $2z-\bar{z} = 2(x+yi) = 2x+2yi-x+yi = x+3yi$

Khi đó $|2z-\bar{z}| \le 3 \Leftrightarrow |x+3yi| \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9y^2} \le 3 \Leftrightarrow x^2+9y^2 \le 9$

Mặt khác z có phần ảo không âm nên $y \ge 0$. Vậy hình H tạo bởi $\begin{cases} x^2+9y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Xét đường E lip có phương trình $(E): x^2+9y^2 = 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1} = 1$ có độ dài hai bán trục lần lượt là $a=3, b=1$ nên diện tích (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 3\pi$

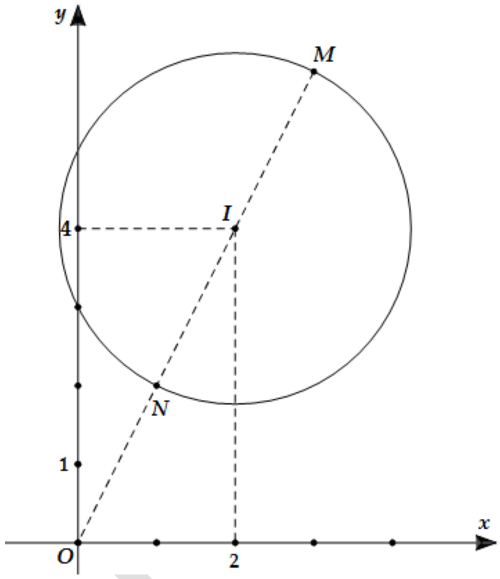
Hình H giới hạn bởi hình (E) phía trên trục $Ox\,(y\ge 0)$ nên $S = \dfrac{S_{(E)}}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ **Chọn C**

Câu 40. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-(2+4i)| = 2$ gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$	B.4	C.-8	D.8
			(SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH)

Lời giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=2$



Vậy $\max|z|OM = OI + R = \sqrt{2^2+4^2}+2 = 2+\sqrt{5}$

$\min|z| = ON = OI - R = \sqrt{2^2+4^2}-2 = 2\sqrt{5}-2$

Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất

Phương trình đường thẳng OI là $y=2x$

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-4)^2=2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 5x^2-20x+16=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x;y)=\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{hoặc} (x;y)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}};4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

Số phức z có môđun lớn nhất là $z=2+\frac{2}{\sqrt{5}}+\left(4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Tương ứng $M\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}};4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=2-\frac{2}{\sqrt{5}}+\left(4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$ tương ứng $N\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Vậy tổng phần ảo của hai số phức là $4+\frac{4}{\sqrt{5}}+4-\frac{4}{\sqrt{5}}=8$. **Chọn D**

Câu 41. Cho số phức $z;w$ khác 0 sao cho $|z-w|=2|z|=|w|$. Phần thực của số phức $u=\frac{z}{w}$

A. $a=-\frac{1}{8}$	B. $a=\frac{1}{4}$	C. $a=1$	D. $a=\frac{1}{8}$
			(THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3)

Lời giải

Sử dụng công thức $\frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Giả sử $u = a + bi\ (a,b \in \mathbb{R})$ .Từ giả thiết, suy ra $\begin{cases} |u| = \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{|z-w|}{|w|} = \left|\dfrac{z-w}{w}\right| = \left|\dfrac{z}{w} - 1\right| = |u-1| = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{1}{4} \\ (a+1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a-1)^2 - a^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 1 - 2a = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{8}$.**Chọn D**

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)z - \dfrac{4}{|z|} = 8$. Trên mặt phẳng tọa độ, khoảng cách từ góc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức z thuộc tập nào?

A. $\left(\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$ B. $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$ C. $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$ D. $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Ta có $(3-4i)z - \dfrac{4}{|z|} = 8 \Leftrightarrow (3-4i)z = 8 + \dfrac{4}{|z|}$ (*)

Lất môđun hai vế của (*) và sử dụng công thức $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$,ta được

$(*) \Leftrightarrow |(3-4i)z| = \left|8 + \dfrac{4}{|z|}\right| \Leftrightarrow |3-4i|.|z| = 4\left|2 + \dfrac{1}{|z|}\right| \Leftrightarrow 5|z| = 4\left|2 + \dfrac{1}{|z|}\right|$

$\Leftrightarrow 5|z|^2 = 4(2|z|+1) \Leftrightarrow 5|z|^2 - 8|z| - 4 = 0 \Leftrightarrow |z| = 2$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểểu diễn số phức $z \Rightarrow OM = \sqrt{x^2+y^2} = |z| = 2 \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$. **Chọn D**

Câu 43. Cho số phức z có môđun $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$

A. $3\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10}$ C. 6 D. $4\sqrt{2}$

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$,ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Khi đó

$P = |z+1| + 3|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2+2x+1}3\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

$= \sqrt{2x+2} + 3\sqrt{2-2x}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left(\sqrt{2x+2}+3\sqrt{2-2x}\right)^2 \le \left(1^2+3^2\right)\left(2x+2+2-2x\right)=40$$

Suy ra $P=\sqrt{2x+2}+3\sqrt{2-2x}\le\sqrt{40}=2\sqrt{10}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{10}$. **Chọn B**

Câu 44. Nếu hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1z_2\ne 1$ và $|z_1|=|z_2|=1$ thì số phức $w=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

A. 0 B.1 C.-1 D.2

Lời giải

Ta có $z_1.\overline{z_1}=|z_1|^2=1\Rightarrow\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$, tương tự ta cũng có $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$

Khi đó $\overline{w}=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=w\Rightarrow w$ là một số thực .**Chọn A**

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+|1-z+z^2|$ .Tổng $M+m$ gần với giá trị sau đây nhất ?

A. 3 B. 4 C.6 D.5

Lời giải

Đặt $t=|1+z|$ với $t\in[0;2]$ nên $t^2=|1+z|^2=(1+z)(1+\overline{z})=2+2\operatorname{Re}(z)\Rightarrow\operatorname{Re}(z)=\dfrac{t^2-2}{2}$

Ta có $|1-z+z^2|=\sqrt{|7-2t^2|}$, khi đó $P=f(t)=t+\sqrt{|7-2t^2|}$ với $f:[0;2]\to\mathbb{R}$

Vậy $f\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)=\sqrt{\dfrac{7}{2}}\le P\le f\left(\sqrt{\dfrac{7}{6}}\right)=3\sqrt{\dfrac{7}{6}}$

$\Rightarrow M+m=3\sqrt{\dfrac{7}{6}}+\sqrt{\dfrac{7}{2}}\approx 5{,}11$. **Chọn D**

Đồ thị hàm số $f(t)=t+\sqrt{|7-2t^2|}$ như hình vẽ bên $\rightarrow$