Cách 2. Ta có, giả thiết $\Leftrightarrow (3+4i)|z|-4+3i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\bar{z}} \Leftrightarrow (3|z|-4)+(4|z|+3)i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\bar{z}}$

Lấy môđun hai vế, ta được $\sqrt{(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{|\bar{z}|}$ mà $|z|=|\bar{z}|$, khi đó

$(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2=\dfrac{50}{|z|^2} \rightarrow$ đến đây có thể giải trực tiếp bằng cách đặt $t=|z|$

Hoặc sử dụng máy tính casio bằng việc thử các đáp án, đến thấy được $|z|=1$

Cách 3. Ta có biến đổi

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z|=2 \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).4+(3i-4).2}{5\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}+\dfrac{11\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z|=\sqrt{10}$ (loại)
- $|z|=\sqrt{2} \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).4+(3i-4).\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{-4+3\sqrt{2}}{5}+\dfrac{3+4\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z|=\sqrt{3}$ (loại)
- $|z|=2\sqrt{2} \rightarrow z=\dfrac{(3+4i).8+(3i-4).2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow |z|=6$ (loại)
- $|z|=1 \Rightarrow |z|=2 \rightarrow z=\dfrac{3+4i+3i-4}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}+\dfrac{7\sqrt{2}}{10}i \Rightarrow |z|=1$ (chọn) .**Chọn D**

Câu 37 : Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích bằng
A. $S=9\pi$ B. $S=12\pi$ C. $S=16\pi$ D. $S=25\pi$
(THPT TRẦN HƯNG ĐẠO- NINH BÌNH)

Lời giải

Cách 1.Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $x+yi=2z+1-i \Leftrightarrow 2z=x-1+(y+1)i$ (1)

Từ giả thiết, ta thấy rằng $|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow |2|.|z-3+4i|\le 4 \Leftrightarrow |2z-6+8i|\le 4$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $|x-1+(y+1)i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |x-7+(y+9)i|\le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2+(y+9)^2}\le 4 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S=\pi R^2=16\pi$

Cách 2. Ta có $w=2z+1-i \Leftrightarrow \dfrac{w-1+i}{2}=z \Leftrightarrow \dfrac{w-1+i}{2}-3+4i=z-3+4i$

$\Leftrightarrow \dfrac{w-7+9i}{2}=z-3+4i \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-7+9i}{2}\right|=|z-3+4i| \Leftrightarrow \dfrac{|w-7+9i|}{2}\le 2 \Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S16\pi$.**Chọn C**

Câu 38. Biết số phức $z=x+yi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đồng thời có môđun nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $M=x^2+y^2$

A. $M=8$ B. $M=10$ C. $M=16$ D. $M=26$

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $z-2-4i=x-2+(y-4)i$ và $z-2i=x+(y-2)i$

Mặt khác $|z-2-4i|=|z-2i|$ nên suy ra $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y+20=x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$

Khi đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\ge 2\sqrt{2}$

Vậy môđun nhỏ nhất của z là $2\sqrt{2}$. Xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow M=8$ **Chọn A**

Câu 39.Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z-\bar{z}|\le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H

A. 3π B. $\dfrac{3\pi}{4}$ C. $\dfrac{3\pi}{2}$ D. 6π

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$,ta có $2z-\bar{z}=2(x+yi)=2x+2yi-x+yi=x+3yi$

Khi đó $|2z-\bar{z}|\le 3 \Leftrightarrow |x+3yi|\le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9y^2}\le 3 \Leftrightarrow x^2+9y^2\le 9$

Mặt khác z có phần ảo không âm nên $y\ge 0$. Vậy hình H tạo bởi $\begin{cases} x^2+9y^2\le 9 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Xét đường E lip có phương trình $(E): x^2+9y^2=9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$ có độ dài hai bán trục lần lượt là $a=3,b=1$ nên diện tích (E) là $S_{(E)}=\pi ab=3\pi$

Hình H giới hạn bởi hình (E) phía trên trục $Ox\,(y\ge 0)$ nên $S=\dfrac{S_{(E)}}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$ **Chọn C**

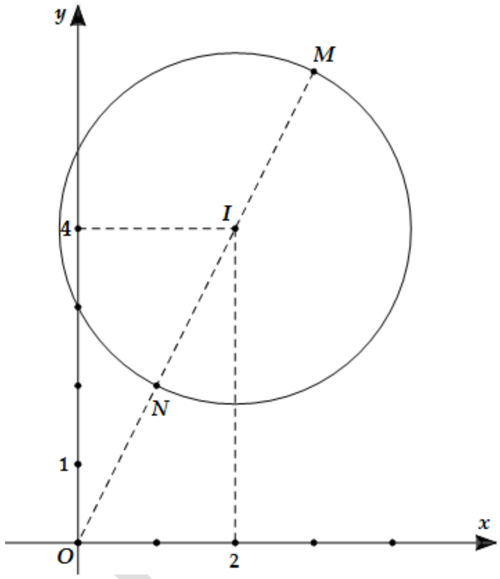
Câu 40. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-(2+4i)|=2$ gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$	B.4	C.-8	D.8

(SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH)

Lời giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=2$



Vậy $\max|z| OM = OI + R = \sqrt{2^2+4^2} + 2 = 2+\sqrt{5}$

$\min|z| = ON = OI - R = \sqrt{2^2+4^2} - 2 = 2\sqrt{5} - 2$

Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất

Phương trình đường thẳng OI là $y = 2x$

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 20x + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x;y) = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{hoặc} (x;y) = \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

Số phức z có môđun lớn nhất là $z = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Tương ứng $M\left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$ tương ứng $N\left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Vậy tổng phần ảo của hai số phức là $4 + \frac{4}{\sqrt{5}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{5}} = 8$. **Chọn D**

Câu 41. Cho số phức $z; w$ khác 0 sao cho $|z - w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$

A. $a = -\frac{1}{8}$	B. $a = \frac{1}{4}$	C. $a = 1$	D. $a = \frac{1}{8}$

(THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3)

Lời giải

Sử dụng công thức $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Giả sử $u=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ .Từ giả thiết, suy ra $\begin{cases}|u|=\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{|z-w|}{|w|}=\left|\dfrac{z-w}{w}\right|=\left|\dfrac{z}{w}-1\right|=|u-1|=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{1}{4}\\ (a+1)^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow(a-1)^2-a^2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow1-2a=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{8}$ **.Chọn D**

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)z-\dfrac{4}{|z|}=8$. Trên mặt phẳng tọa độ, khoảng cách từ góc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức z thuộc tập nào?

A. $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$ B. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$ C. $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$ D. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Ta có $(3-4i)z-\dfrac{4}{|z|}=8\Leftrightarrow(3-4i)z=8+\dfrac{4}{|z|}$ (*)

Lất môđun hai vế của (*) và sử dụng công thức $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$,ta được

(*) $\Leftrightarrow|(3-4i)z|=\left|8+\dfrac{4}{|z|}\right|\Leftrightarrow|3-4i|.|z|=4\left|2+\dfrac{1}{|z|}\right|\Leftrightarrow5|z|=4\left|2+\dfrac{1}{|z|}\right|$

$\Leftrightarrow5|z|^2=4(2|z|+1)\Leftrightarrow5|z|^2-8|z|-4=0\Leftrightarrow|z|=2$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểểu diễn số phức $z\Rightarrow OM=\sqrt{x^2+y^2}=|z|=2\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$. **Chọn D**

Câu 43. Cho số phức z có môđun $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$

A. $3\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10}$ C. 6 D. $4\sqrt{2}$

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$,ta có $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Khi đó

$P=|z+1|+3|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}$

$=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}3\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

$=\sqrt{2x+2}+3\sqrt{2-2x}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$\left(\sqrt{2x+2}+3\sqrt{2-2x}\right)^2 \le \left(1^2+3^2\right)\left(2x+2+2-2x\right)=40$

Suy ra $P=\sqrt{2x+2}+3\sqrt{2-2x}\le\sqrt{40}=2\sqrt{10}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{10}$. **Chọn B**

Câu 44. Nếu hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1z_2\ne 1$ và $|z_1|=|z_2|=1$ thì số phức $w=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

A. 0 B.1 C.-1 D.2

Lời giải

Ta có $z_1.\overline{z_1}=|z_1|^2=1\Rightarrow\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$, tương tự ta cũng có $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$

Khi đó $\overline{w}=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=w\Rightarrow w$ là một số thực .**Chọn A**

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+|1-z+z^2|$ .Tổng $M+m$ gần với giá trị sau đây nhất ?

A. 3 B. 4 C.6 D.5

Lời giải

Đặt $t=|1+z|$ với $t\in[0;2]$ nên $t^2=|1+z|^2=(1+z)(1+\overline{z})=2+2\operatorname{Re}(z)\Rightarrow\operatorname{Re}(z)=\dfrac{t^2-2}{2}$

Ta có $|1-z+z^2|=\sqrt{|7-2t^2|}$, khi đó $P=f(t)=t+\sqrt{|7-2t^2|}$ với $f:[0;2]\to\mathbb{R}$

Vậy $f\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)=\sqrt{\dfrac{7}{2}}\le P\le f\left(\sqrt{\dfrac{7}{6}}\right)=3\sqrt{\dfrac{7}{6}}$

$\Rightarrow M+m=3\sqrt{\dfrac{7}{6}}+\sqrt{\dfrac{7}{2}}\approx 5{,}11$. **Chọn D**

Đồ thị hàm số $f(t)=t+\sqrt{|7-2t^2|}$ như hình vẽ bên $\rightarrow$