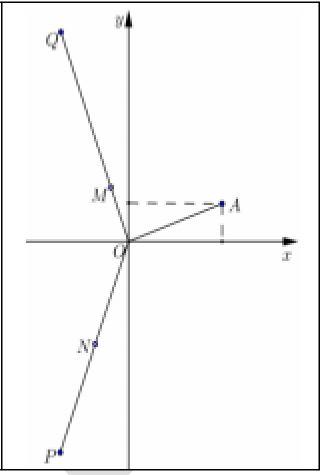
Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w=\dfrac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M,N,P,Q .Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

A.Điểm Q B.Điểm M

C.Điểm N D.Điểm P

(THPT CHUYÊN ĐH VINH LẦN 1)



Lời giải

Đặt $z=x+yi(x,y>0)$,khi đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ và $x>y$ (hình vẽ)

Ta có $w=\dfrac{1}{iz}=-\dfrac{i}{x+yi}=-\dfrac{i(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}=-\dfrac{y+xi}{x^2+y^2}=-2y-2xi$

Vì $x,y>0$ nên điểm biểu diễn số phức w là $(-2y;-2x)$ đều có hoành độ, tung độ âm.

Đồng thời $x>y\Leftrightarrow -2y>-2x\Rightarrow x_w<y_w<0$ và $|w|=2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}=2|z|$

Dựa vào hình vẽ, điểm P chính là điểm cần tìm vì điểm N tuy thỏa mãn $x_w<y_w<0$ nhưng độ dài ON xấp xỉ bằng độ dài OA . **Chọn D**

Câu 20. Cho số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-6+8i|=5$ và có môđun nhỏ nhất. Tính tổng $x+y$

A. $x+y=-3$ B. $x+y=-1$ C. $x+y=1$ D. $x+y=2$

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM)

Lời giải

Dựa vào ví dụ, ta phát triển dạng toán Min-Max số phức như sau

Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa điều kiện $|z-(a+bi)|=R\ (R>0)$ là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

Chứng minh. Gọi $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$

Theo giả thiết $|z-(a+bi)|=R\Leftrightarrow|(x-a)+(y+b)i|=R$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R\Leftrightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Vậy tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

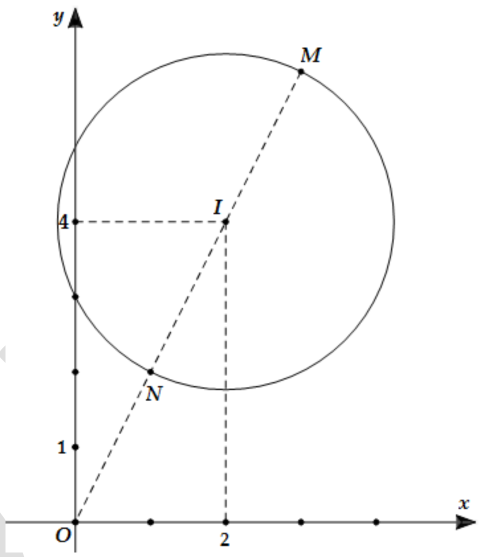
Ví dụ 21.Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=\sqrt{5}$ .Tìm $\max|z|$

A. $\max|z|=3\sqrt{5}$ B. $\max|z|=5$ C. $\max|z|=\sqrt{5}$ D. $\max|z|=\sqrt{13}$

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Vậy $\max|z|=OM=OI+R=\sqrt{2^2+4^2}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ **Chọn A.**



***Hỏi thêm:**

a) Tìm $\min|z|$

$$\min|z|=ON=OI-R=\sqrt{2^2+4^2}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

b) Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng OI là $y=2x$.

Tọa độ hai điểm M,N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 5x^2-20x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$$

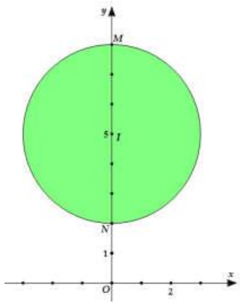
Số phức z có môđun lớn nhất là $z=3+6i$ tương ứng với điểm $M(3;6)$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=1+2i$ tương ứng với điểm $N(1;2)$

Ví dụ 22.Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5i|\le 3$ .Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?

A.0 B.3 C.2 D.4

Hướng dẫn giải



Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(0;5)$

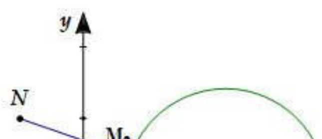
và bán kính $R=3$

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=2i$ ứng với điểm $N(0;2)$.**Chọn C**

Tổng quát. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=r_1$ $(r_1>0)$ .Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$

Gọi $I(z_1);N(z_2)$ và $M(z)$ .Tính $IN=|z_1-z_2|=r_2$

Khi đó, $\max P=NM_1=r_1+r_2$ và $\min P=NM_2=|r_1-r_2|$



Áp dụng

Câu 1.(THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 1) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$. Tìm $\max|z|$

A. $\max|z|=1$ B. $\max|z|=2$ C. $\max|z|=7$ D. $\max|z|=6$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1+i|\left|z+\dfrac{1-7i}{1+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|z-(3+4i)\right|=1$

Vì $\left|(3+4i)-0\right|=5$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+5=6$. **Chọn D**

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$

A. $\max|z|=1$ B. $\max|z|=2$ C. $\max|z|=\sqrt{2}$ D. $\max|z|=3$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1\Leftrightarrow|-iz+1|=1\Leftrightarrow|-i|.\left|z+\dfrac{1}{-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-(-i)|=1$

Vì $\left|(-i)-0\right|=1$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+1=2$ **Chọn B**

Câu 3. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ .Biết rằng số phức $z=x+yi$,$(x,y\in\mathbb{R})$ có môđun nhỏ nhất. Tính $P=x^2+y^2$

A. $P=10$ B. $P=8$ C. $P=16$ D. $P=26$

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ .Ta có $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow|(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=x^2+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16=0\Leftrightarrow y=4-x$

Do đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=2$ .Vậy $P=2^2+2^2=8$. **Chọn B**

Câu 4. (ĐỀ THTT LẦN 5 – 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$ .Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A.10 và 4 B. 5 và 4 C. 4 và 3 D. 5 và 3

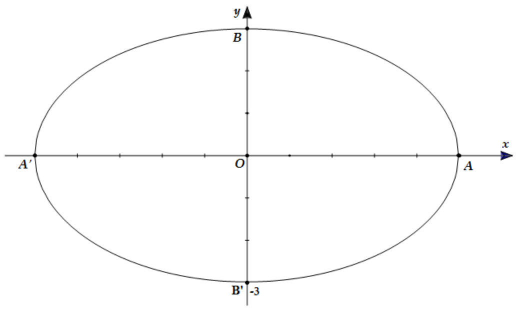
Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.Theo giả thiết, ta có $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow|(x-4)+yi|+|(x+4)+yi|=10\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$ (*)

Gọi $M(x;y),\ F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$ nên tập hợp các điểm $M(z)$ là đường elip (E) .



Ta có $c=4; 2a=10\Leftrightarrow a=5$ và $b^2=a^2-c^2=9$

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Vậy $\max|z|=OA=OA'=5$ và $\min|z|=OB=OB'=3$. **Chọn D**

Câu 5. Biết sốphức $z=x+yi$,$(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thờiđiều kiện $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{33}$ B. $|z|=50$ C. $|z|=\sqrt{10}$ D. $|z|=5\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Ta có $P=|(x+2)^2+yi|^2-|x+(y-1)i|^2=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]$

$=4x+2y+3\Leftrightarrow 4x+2y+3-P=0\ (\Delta)$.

Ta tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung $\Rightarrow d(I;\Delta)\leq R$

$$\Leftrightarrow\frac{|12+8+3-P|}{\sqrt{20}}\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow|23-P|\leq 10\Leftrightarrow -10\leq 23-P\leq 10\Leftrightarrow 13\leq P\leq 33.$$

Do đó $\max P = 33$ .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-30=0 \\ (x-3)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}$

Vậy $|z| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.**Chọn D**

Câu 23. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãnđiềukiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

A. $P = 1 - i$ B. $P = -1 - i$ C. $P = -1$ D. $P = 1 + i$

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = 1$

Đặt $w = \frac{z_1}{z_2} = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$,khi đó $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Khi đó $P = w^2 + \frac{1}{w} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1$.**Chọn C.**

Câu 24. Tính tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn $|2z-1| = |\bar{z}+1+i|$, đồng thời điểm biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

A. $\sqrt{5}$ B.3 C. $3\sqrt{5}$ D.1

(SỞ GD&ĐT THANH HÓA)

Lời giải

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó $|2z-1| = |\bar{z}+1+i| \Leftrightarrow |2x-1+2yi| = |x+1-(y-1)i|$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + 4y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-6x+2y-1=0 \quad (1)$

Mà điểm biểu diễn $M_{(z)} \in (C): (x-1)^2+(y-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0 \ (2)$

Lấy (1) - 3.(2), ta được $3x^2+3y^2-6x+2y-1-3x^2-3y^2+6x+6y+9=0 \Leftrightarrow y=-1$

Thế $y=-1$ vào phương trình (2), ta có:

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-i \\ z_2=2-i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|.|z_2| = |-i|.|2-i| = \sqrt{5}$ **Chọn C**

Câu 25. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z+2-2i| = |z-4i|$, $w = iz+1$ .Giá trị nhỏ nhất của biểu