$\Leftrightarrow |z|+2|z|i+2-i=\dfrac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow |z|+2+(2|z|-1)i=\dfrac{10}{z}$ (*)

Lấy môđun hai vế của (*), ta được(*)$\Leftrightarrow \sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}$

Đặt $t=|z|$, ta có $\sqrt{(t+2)^2+(2t-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{t} \Leftrightarrow t^2(5t^2+5)=10 \Leftrightarrow t^4+t^2-2=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy môđun của số phức z bằng $1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$

Cách 2. Sử dụng máy tính casio (hướng dẫn chi tiết ở câu 26)để tìm $|z|$

Cách 3. Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ và $c=|z|$, thay vào đẳng thức đã cho thì

$$Gt \Leftrightarrow (1+2i)c=\frac{\sqrt{10}}{a+bi}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)c=\frac{(a-bi)\sqrt{10}}{c^2}-2+i$$

$$\Leftrightarrow c-\frac{a\sqrt{10}}{c^2}+2+i\left(2c+\frac{b\sqrt{10}}{c^2}-1\right)=0$$

Suy ra $\begin{cases} c-\dfrac{a\sqrt{10}}{c^2}+2=0 \\ 2c+\dfrac{b\sqrt{10}}{c^2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+2=\dfrac{a\sqrt{10}}{c^2} \\ 1-2c=\dfrac{b\sqrt{10}}{c} \end{cases}$ nên $(c+2)^2+(1+2c)^2=\dfrac{10(a^2+b^2)}{c^4}=\dfrac{10}{c^2}$

Giải ra ta có $c=\pm 1$ mà $c>0$ nên $c=1$ hay $|z|=1$ .Do đó $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ **Chọn B**

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=3$ .Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là :

A.3 B.$\sqrt{5}$ C.$\sqrt{13}$ D.5

(TOÁN HỌC& TUỔI TRẺ LẦN 8)

Lời giải

Ta có $a=\left|z+\dfrac{1}{z}\right| \Leftrightarrow a^2=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$

$$=|z|^2+\frac{z^2+(\bar{z})^2}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^2}=\frac{|z|^4+(z+\bar{z})^2-2|z|^2+1}{|z|^2}$$

Khi đó $|z|^4-|z|^2.(a^2+2)+1=-(z+\bar{z})^2\le 0\Rightarrow |z|\in\left[\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2};\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$

Vậy $\max|z|=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2};\min|z|=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\Rightarrow M+m=\sqrt{a^2+4}=\sqrt{13}$ **Chọn C**.

Câu 11. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$ .Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$ B. $|z|>2$ C. $|z|<\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$

(TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ LẦN 8)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức số phức, ta có, $|u+v|\ge|u|+|v|\ge|u-v|$

Khi đó $2\sqrt{2}\ge 2|z-1|+3|z-i|=2(|z-1|+|z-i|)+|z-i|\ge 2|z-1-(z-i)|+|z-i|$

$\Rightarrow 2|i-1|+|z-i|=2\sqrt{2}+|z-i|\Leftrightarrow |z-i|\le 0\Rightarrow z=i\Rightarrow |z|=1$

Cách 2. Sử dụng hình học, giả sử điểm $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$

Số phức $z-1$ có điểm biểu diễn là $A(x-1;y)$, $z-1$ có điểm biểu diễn là $B(x;y-1)$

Ta có $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2.OA+3.OB\le 2.AB$ (1) vì $\overline{AB}(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$

Mặt khác $2.OA+3.OB=2.(OA+OB)+OB\ge 2.AB+OB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $2.AB\ge 2.AB+OB\Leftrightarrow OB\le 0\Rightarrow OB=0\Rightarrow 0\equiv B(0;0)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow z=i$

Vậy môđun của số phức z là $|z|=|i|=1$ **Chọn D**

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với số phức $w=z-2+2i$

A. $\min|w|=\dfrac{3}{2}$ B. $\min|w|=2$ C. $\min|w|=1$ D. $\min|w|=\dfrac{1}{2}$

(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH- ĐỒNG NAI)

Lời giải

Ta có $z^2-2z+5=(z-1)^2+4=(z-1)^2-(2i)^2=(z-1+2i)(z-1-2i)$

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1-2i\\|z-1-2i|=|z+3i-1|\end{array}\right.$

TH1. Với $z=1-2i$, ta có $w=z-2+2i=1-2i-2+2i=-1\Rightarrow |w|=1$

Th2. Với $|z-1-2i|=|z+31-1|$ (*) ,đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$$(*)\Leftrightarrow |x-1+(y-2)i|=|x-1+(y-3)i|\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$$

Do đó $w=z-2+2i=x-\frac{1}{2}i-2+2i=x-2+\frac{3}{2}i\Rightarrow |w|=\sqrt{(x-2)^2+\frac{9}{4}}\ge\frac{3}{2}$ **Chọn A**

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$

A. $\max T=2\sqrt{5}$ B. $\max T=2\sqrt{10}$ C. $\max T=3\sqrt{5}$ D. $\max T=3\sqrt{2}$

(THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ - HÀ NỘI)

Lời giải

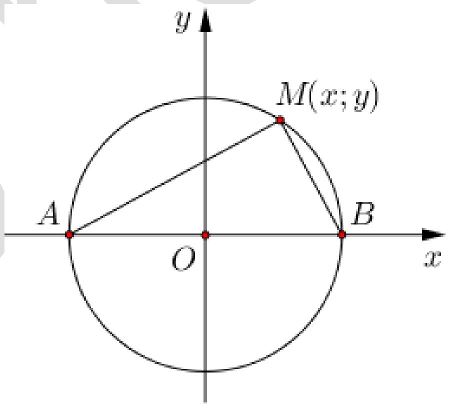
Cách 1. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow M(x;y)$

Và $A(-1;0), B(1;0)$. Ta có $|z|=1\Rightarrow |x+yi|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB .

$\Rightarrow MA^2+MB^2=AB^2=4$ .Khi đó, theo Bunhiacopxki, ta có

$$T=MA+2MB\le\sqrt{(1^2+2^2)(MA^2+MB^2)}=\sqrt{5.4}=2\sqrt{5}$$



Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T=2\sqrt{5}$. **Chọn A**

Cách 2. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow |z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ và $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Mặt khác $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$,khi đó

$$T=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\le\sqrt{(1^2+2^2)\left[(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2\right]}$$

$$\sqrt{10(x^2+y^2+1)}=\sqrt{10.2}=2\sqrt{5}\Rightarrow\max T=2\sqrt{5}$$

Câu 14. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $P=\sqrt{2}$ C. $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $P=\sqrt{3}$

(THPT THANH CHƯƠNG I - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$,ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y-1)i| = |2 - y + xi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = \sqrt{(2-y)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 - 4y + 1 = 4 - 4y + y^2 + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$ .Sử dụng công thức (chứng minh ở câu 16)

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2\right)} = \sqrt{3}$ **Chọn D**

Câu 15. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .Tính giá trị biểu thức $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

A.1 B.0 C.-1 D.$1 + i$

(THPT CHUYÊN BIÊN HÒA-HÀ NAM)

Lời giải

Ta có $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$

$= -2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -2z_1z_2z_3\left(\frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} + \frac{|z_3|}{z_3}\right) = -z_1z_2z_3\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$

Mặt khác $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$ suy ra $A = 0$ **Chọn B**

Câu 16. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$ .Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$ B. $P = 2\sqrt{26}$ C. $P = 4\sqrt{6}$ D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

- Bổ đề. Cho hai số phức z_1 và z_2, ta luôn có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ (*)

Chứng minh.Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$ và $z.\overline{z} = |z|^2$ Khi đó

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) + (z_1 - z_2)\left(\overline{z1} - \overline{z_2}\right)$

$= z_1.\overline{z_1} + z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2} + z_1.\overline{z_1} - z_1.\overline{z_2} - \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2}$

$= 2\left(z_1.\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2}\right) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \rightarrow$ ***đpcm.***

- Áp dụng (*), ta được $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4\Rightarrow |z_1-z_2|^2=4-(\sqrt{3})^2=1\Rightarrow |z_1-z_2|=1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $P=|z_1|+|z_2|\le\sqrt{\left(2|z_1|^2+|z_2|^2\right)}=2\sqrt{26}$ **Chọn B**

Câu 17. Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z)=0$ thì

A. $P(|z|)=0$ B. $P\left(\frac{1}{z}\right)=0$ C. $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=0$ D. $P(\bar{z})=0$

(THPT CHUYÊN TỈNH HÀ NAM)

Lời giải

Chọn hàm số $P(z)=z^2-2z+5$ .Phương trình $P(z)=0\Leftrightarrow z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1+2i\\z=1-2i\end{array}\right.$

Xét với số phức $z=1+2i$, ta có

- $|z|=|1+2i|=\sqrt{5}$ suy ra $P(|z|)=|z^2|-2|z|+5=\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}+5=10-2\sqrt{5}\ne 0.$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+2i}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+5=\frac{112}{25}+\frac{16}{25}i\ne 0$
- $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{1-2i}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{\bar{z}^2}-\frac{2}{\bar{z}}+5=\frac{112}{25}-\frac{16}{25}i\ne 0$
- $\bar{z}=1-2i$ suy ra $P=\left(\bar{z}\right)=\bar{z}^2-2\bar{z}+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=0$ **Chọn D**

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 1$.Đặt $A=\frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $|A|\le 1$ B. $|A|\ge 1$ C. $|A|<1$ D. $|A|>1$

(THPT CHUYÊN HÀ NAM)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $A=\frac{2z-i}{2+iz}\Leftrightarrow A(2+iz)=2z-i\Leftrightarrow 2A+Azi=2z-i$

$\Leftrightarrow 2A+i=z(Ai-2)\Leftrightarrow z=\frac{2A+i}{Ai-2}$ .Mà $|z|\le 1\Rightarrow\left|\frac{2A+i}{Ai-2}\right|\le 1\Leftrightarrow |2A+i|\le|Ai-2|$ (*)

Đặt $A=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó (*) $\Leftrightarrow|2x+(2y+1)i|\le|-y-2+xi|$

$\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+(2y+1)}\le\sqrt{(y+2)^2+x^2}\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4y+1\le x^2+y^2+4y+4\Leftrightarrow x^2+y^2\le 1$

Vậy môđun của $A=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ **Chọn A**