TỔNG ÔN SỐ PHỨC

LỜI GIẢI CHI TIẾT 50 CÂU TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC CHỌN LỌC TRONG CÁC ĐỀ

THI THỬ THPT QUỐC GIA – 2017

CÁC CÔNG THỨC QUAN TRỌNG CẦN NẮM VỮNG

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$	$\overline{z_1}.\overline{z_2}=\overline{z_1.z_2}$	$\lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert=\lvert z_1.z_2\rvert$
$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$	$\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$	$z.\overline{z}=\lvert z\rvert^2$
$\lvert z_1.z_2\rvert^2=(z_1.z_2).\left(\overline{z_1.z_2}\right)$	$\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z.\overline{z}}{2},\mathrm{Im}(z)-\dfrac{z-\overline{z}}{2}$
$\lvert z_1\rvert-\lvert z_2\rvert\le\lvert z_1-z_2\rvert\le\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$	$\lvert z_1\rvert-\lvert z_2\rvert\le\lvert z_1+z_2\rvert\le\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$	$-\lvert z\rvert\le\left\{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\right\}\le\lvert z\rvert$

45 CÂU TRẮC NGHIỆM + 5 CÂU VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $\lvert z^2+4\rvert=2\lvert z\rvert$. Đặt $P=8(b^2-a^2)-12$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=\left(\lvert z\rvert-2\right)^2$ B. $P=\left(\lvert z\rvert^2-4\right)^2$ C. $P=\left(\lvert z\rvert-4\right)^2$ D. $P=\left(\lvert z\rvert^2-2\right)^2$

(THPT ĐẶNG THÚC HỨA-NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1.Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi\Rightarrow z^2+4=a^2-b^2+4+2abi.$

Khi đó, giả thiết $\lvert z^2+4\rvert=2\lvert z\rvert\Leftrightarrow\left(a^2-b^2+4\right)^2+4a^2b^2=4\left(a^2+b^2\right)$

$$\Leftrightarrow 8\left(b^2-a^2\right)=16-4\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+b^2\right)^2$$

$$\Rightarrow P=\left(a^2+b^2\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)+4=\lvert z\rvert^4-4\lvert z\rvert^2+4=\left(\lvert z\rvert^2-2\right)^2$$

Cách 2.Từ giả thiết, ta có $\lvert z^2+4\rvert^2=\left(2\lvert z\rvert\right)^2\Leftrightarrow\left(z^2+4\right)\left(\overline{z^2}+4\right)=4\lvert z\rvert^2=4z.\overline{z}$

$$\Leftrightarrow z^2.\overline{z^2}+4z^2+4\overline{z^2}+16=4z.\overline{z}\Leftrightarrow\left(z.\overline{z}\right)^2-4.z.\overline{z}+4=-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(z.\overline{z}-2\right)^2=-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)\Leftrightarrow-12-4\left(z^2+\overline{z^2}\right)=\left(\lvert z\rvert^2-2\right)^2\qquad(1)$$

Đặt $z=a+bi\to\overline{z}=a-bi\Rightarrow z^2+\overline{z^2}=2\left(a^2-b^2\right)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $P=8(b^2-a^2)-12=\left(|z|^2-2\right)^2$.**Chọn D**

> Câu 2. Cho các số phức $z_1\neq 0,z_2\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}$
>
> Tính giá trị của biểu thức $P=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$
>
> A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
>
> (THPT ĐẶNG THÚC HỨA-NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1.Ta có $\frac{2}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow\frac{z_1+2z_2}{z_1z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow\left(z_1+2z_2\right)\left(z_1+z_2\right)=z_1.z_2$

$\Leftrightarrow\left(z_1\right)^2+2.z_1.z_2+2\left(z_2\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+2.\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+2=0\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=i-1$ hoặc $\frac{z_1}{z_2}=-1-i$

Khi đó $P=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=|i-1|+\left|\frac{1}{i-1}\right|=|i-1|+\frac{1}{|i-1|}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Cách 2. Chọn $z_1=i\Rightarrow\frac{2}{i}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{i+z_2}\Rightarrow z_2=\frac{1-i}{2}\Rightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2}\Rightarrow P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D**

> Câu 3. Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz-(3i+1).\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\frac{26}{9}iz$ có môđun là
>
> A.9 B. $\sqrt{26}$ C. $\sqrt{6}$ D. 5
>
> (THPT PHẠM HỒNG THÁI-HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$,khi đó giả thiết $\Leftrightarrow i\left(x+yi\right)-\left(3i+1\right)\left(x-yi\right)=\left(1+i\right)\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow xi-y-3xi-3y-x+yi=-x-4y+\left(y-2x\right)i=x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)i.$

$\Rightarrow\begin{cases}-x-4y=x^2+y^2 & (1)\\ -2x+y=x^2+y^2 & (2)\end{cases}$ .Lấy (1) – (2), ta được $-x-4y-\left(-2x+y\right)=0\Leftrightarrow x=5y.$

Thế $x=5y$ vào phương trình (1), ta có $26y^2=-9y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=0\\ y=-\frac{9}{16}\Rightarrow x=-\frac{45}{26}\end{array}\right.$

Vậy $z=x+yi=-\frac{45}{26}-\frac{9}{26}i\Rightarrow |w|=\left|\frac{26}{9}i\left(-\frac{45}{26}-\frac{9}{26}i\right)\right|=|1-5i|=\sqrt{26}$.**Chọn B**

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+i|+|z-2-i|$

A. $\max T=8\sqrt{2}$ B. $\max T=4$ C. $\max T=4\sqrt{2}$ D. $\max T=8$

(THPT CHU VĂN AN – HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$, ta có $|z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|x-1+yi|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=2\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+1\quad(*)$

Lại có $T=|z+i|+|z-2-i|=|x+(y+1)i|+|x-2+(y-1)i|$

$=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$

Kết hợp với (*), ta được $T=\sqrt{2x+2y+2}+\sqrt{6-2x-2y}=\sqrt{2(x+y)+2}+\sqrt{2-2(x+y)}$

Đặt $t=x+y$, khi đó $T=f(t)=\sqrt{2t+2}+\sqrt{6-2t}$ với $t\in[-1;1]$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+2}}-\frac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow f(t)_{\max}=f(1)=4$ **Chọn B**

Câu 5. Tìm môđun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

A. $|z|=1$ B. $|z|=4$ C. $|z|=2$ D. $|z|=\frac{1}{2}$

(SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH)

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $z-4=|z|+i|z|-4i-3zi\Leftrightarrow z(1+3i)=|z|+4+(|z|-4)i\ (*)$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $|z(1+3i)|=\left||z|+4+(|z|-4)i\right|$

$\Leftrightarrow|z|.|1+3i|=\sqrt{(|z|+4)^2}\Leftrightarrow|z|\sqrt{10}=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}$

$\Leftrightarrow10|z|^2=(|z|+4)^2+(|z|-4)^2\Leftrightarrow8|z|^2=32\Leftrightarrow|z|^2=4\Rightarrow|z|=2$ **Chọn C**

Cách 2. Ta biến đổi $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i\Leftrightarrow z=\frac{(1+i)|z|-4i+4}{1+3i}$

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z|=1\to z=\dfrac{1+i-4i+4}{1+3i}=\dfrac{5-3i}{1+3i}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{5}i\Rightarrow|z|=\dfrac{\sqrt{85}}{5}\neq 1$ (loại)
- $|z|=4\to z=\dfrac{4(1+i)-4i+4}{1+3i}=\dfrac{8}{1+3i}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{5}i\Rightarrow|z|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\neq 1$ (loại)
- $|z|=2\to z=\dfrac{2(1+i)-4i+4}{1+3i}=\dfrac{6-2i}{1+3i}=-2i\Rightarrow|z|=2$ (chọn)

Câu 6. Cho số phức $z\neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w=\dfrac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính giá trị biểu thức $\dfrac{|z|}{1+|z|^2}$

A. $\dfrac{1}{5}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. 2 D. $\dfrac{1}{3}$

(THPT CHUYÊN QUỐC HỌC - HUẾ)

Lời giải

Cách 1. Tư duy nhanh. w là số thực $\to\dfrac{1}{w}$ là số thực $\to z+\dfrac{1}{z}$ là số thực.

Mà dễ thấy $z+\bar{z}$ là số thực nên $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow\bar{z}.z=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$

Cách 2. Ta có biến đổi $\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}\Leftrightarrow z+z.\bar{z}^2=\bar{z}+\bar{z}.z^2\Leftrightarrow z-\bar{z}=\left(z-\bar{z}\right).z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-\bar{z}=0\\ z.\bar{z}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow z.\bar{z}=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$

Cách 3. Chọn $w=\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(z-1)^2=0\Leftrightarrow z=1\Rightarrow|z|=1\Rightarrow\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$ **Chọn B**

Câu 7. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M,M' .Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N,N' .Biết rằng $M,M'\ N,N'$ là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

(THPT CHUYÊN LÀO CAI)

Lời giải

Gọi $M(x;y)\to M'(x;-y)$ và $(4+3i)z=4x-3y+(3x+4y)i\Rightarrow\begin{cases}N(4x-3y;3x+4y)\\N'(4x-3y;-3x-4y)\end{cases}$

Dễ thấy $MM'\parallel NN'$ vì cùng vuông góc với Ox nên để $MM'N'N$ là hình chữ nhật.

Khi và chỉ khi $\begin{cases}MM'=NN'\\MN=M'N'\Rightarrow x+y=0\Rightarrow z=x-xi\Rightarrow|z+4i-5|=\sqrt{(x-5)^2+(x-4)^2}\\MN\parallel Ox\end{cases}$

Ta có $(x-5)^2+(x-4)^2=\frac{1}{2}(2x-9)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow|z+4i-5|_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **Chọn C**

Câu 8. Tính môđun của số phức z ,biết $\frac{|z|^2}{z}+iz+\frac{z-i}{1-i}=0$

A. 2 B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{9}$

(THPT YÊN MÔ A-NINH BÌNH)

Lời giải

Dễ thấy $z.\bar{z}=|z|^2\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{|z|^2}{z}$, khi đó giả thiết $\Leftrightarrow iz+\bar{z}+\frac{z-i}{1-i}=0\Leftrightarrow iz+\bar{z}+\frac{(1+i)(z-i)}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2iz+2\bar{z}+z-i+iz-i^2=0\Leftrightarrow(3i+1)z+\bar{z}=i-1\quad(*)$

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ suy ra $\bar{z}=x-yi$, do đó $(*)\Leftrightarrow(3i+1)(x+yi)+x-yi=i-1$

$\Leftrightarrow 3xi-3y+x+yi+x-yi=i-1\Leftrightarrow 2x-3y+3xi=i-1\Rightarrow\begin{cases}3x=0\\2x-3y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$

Vậy $z=\frac{i}{3}\Rightarrow|z|=\left|\frac{i}{3}\right|=\frac{1}{3}$ **Chọn C**

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i$ .Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2.$ B. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$ C. $|z|>2$ D. $|z|<\frac{1}{2}$

(THPT NHÂN CHÍNH- HÀ NỘI)

Lời giải

Cách 1.Từ giả thiết, ta có $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i\Leftrightarrow(1+2i)|z|+2-i=\frac{\sqrt{10}}{z}$