ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ

ĐẠO HÀM

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NEW

ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017 - 2018

ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM.

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

• Cho hàm số *y = f(x)* xác định trên khoảng *(a; b)* và $x_0 \in (a; b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0))$$

• Nếu hàm số *y = f(x)* có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

$$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

***Hệ quả*:** Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow \exists f(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

4. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0.

B – BÀI TẬP

Câu 1. Giới hạn (*nếu tồn tại*) nào sau đây dùng để định nghĩa đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 < 1$?

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Hướng dẫn giải:

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm thì biểu thức ở đáp án C đúng.

Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0. Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Định nghĩa $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ hay $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

A. Đúng (theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm).

B. Đúng vì

$\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=\Delta x+x_0$

$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x+x_0-x_0}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

C. Đúng vì

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0,\ \Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h+x_0-x_0}=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Câu 4. Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^3$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. **B.** 7. **C.** 19. **D.** -7.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^3-2^3={x_0}^3+\left(\Delta x\right)^3+3x_0\Delta x\left(x_0+\Delta x\right)-8$.

Với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ thì $\Delta y=19$.

Câu 5. Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f\left(x\right)=2x\left(x-1\right)$ theo x và Δx là

A. $4x+2\Delta x+2$.

B. $4x+2\left(\Delta x\right)^2-2$.

C. $4x+2\Delta x-2$.

D. $4x\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-2\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\frac{2x\left(x-1\right)-2x_0\left(x_0-1\right)}{x-x_0}$$

$$=\frac{2\left(x-x_0\right)\left(x+x_0\right)-2\left(x-x_0\right)}{x-x_0}=2x+2x_0-2=4x+2\Delta x-2$$

Câu 6. Số gia của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là

A. $\frac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2-\Delta x$. **B.** $\frac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2-\Delta x\right]$. **C.** $\frac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2+\Delta x\right]$. **D.** $\frac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2+\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Với số gia Δx của đối số x tại $x_0 = -1$ Ta có

$$\Delta y = \frac{(-1+\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là

A. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x\right)$.
B. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 2x - 1)$.
C. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 2x + 1)$.
D. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có :

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) - (x_0^2 - x_0)$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0 - \Delta x - x_0^2 + x_0$$

$$= (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x$$

Nên $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 2x_0 - 1)$

Vậy $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 2x - 1)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0) = 1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).
B. Chỉ (II).
C. Cả hai đều sai.
D. Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi Δx là số gia của đối số tại 0 sao cho $\Delta x > 0$.

Ta có $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta^2 x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x\sqrt{\Delta x}} = +\infty$.

Nên hàm số không có đạo hàm tại 0.

Câu 9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Vậy $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Câu 10. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\ge 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\ne 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ nên $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Do $\lim\limits_{\Delta x^-\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1\ne\lim\limits_{\Delta x^+\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$ nên $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ không tồn tại.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x=2$ thì giá trị của b là

A. $b=3.$ **B.** $b=6.$ **C.** $b=1.$ **D.** $b=-6.$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có

- $f(2)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=2b-8$

$f(x)$ có đạo hàm tại $x=2$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2b-8=4\Leftrightarrow b=6.$

Câu 14. Số gia của hàm số $f(x)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là

A. $\Delta x(\Delta x+2x-4).$ **B.** $2x+\Delta x.$ **C.** $\Delta x.(2x-4\Delta x).$ **D.** $2x-4\Delta x.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có

$\Delta y=f(\Delta x+x)-f(x)$

$=(\Delta x+x)^2-4(\Delta x+x)+1-(x^2-4x+1)$

$=\Delta x^2+2\Delta x.x+x^2-4\Delta x-4x+1-x^2+4x-1=\Delta x^2+2\Delta x.x-4\Delta x$

$=\Delta x(\Delta x+2x-4)$

Câu 15. Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba câu trên:

A. Có hai câu đúng và một câu sai. **B.** Có một câu đúng và hai câu sai.

C. Cả ba đều đúng. **D.** Cả ba đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó. Đây là mệnh đề đúng.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Phản ví dụ

Lấy hàm $f(x)=|x|$ ta có $D=\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhưng ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1\end{cases}$

Nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Vậy mệnh đề (2) là mệnh đề sai.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Vì (1) là mệnh đề đúng nên ta có $f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.
Vậy (3) là mệnh đề đúng.

Câu 16. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$

(2) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x = 0$

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) đúng. **C.** Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = f(0)$. Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$

Ta có : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{|x|}{x+1} - 0}{x} = \dfrac{|x|}{x(x+1)}$ (với $x \neq 0$)

Do đó : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1 \end{cases}$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi $x \to 0$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = x^2 + |x|$. Xét hai câu sau:

(1). Hàm số trên có đạo hàm tại $< nguyenthuongnd86@gmail.com >$.

(2). Hàm số trên liên tục tại $x = 0$.

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng. **C.** Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + x) = 0$.

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - x) = 0$.

+) $f(0) = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

Mặt khác:

+) $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$.

+) $f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-1\right)=-1$.

$\Rightarrow f'\left(0^+\right)\neq f'\left(0^-\right)$. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 18. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & khi\ \ x\geq 1\\ ax+b & khi\ x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

A. $\begin{cases}a=23\\ b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=3\\ b=-11\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=33\\ b=-31\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$

Hàm có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow a+b=2$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax+b-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$ (Do $b=2-a$)

Hàm có đạo hàm tại $x=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{khi}\ \ x\leq 1\\ ax+b & \text{khi}\ \ x>1\end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của *a*, *b* thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

A. $a=1;b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2};b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1;b=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x=1$ nên Ta có $a+b=\dfrac{1}{2}$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ nên giới hạn 2 bên của $\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}$ bằng nhau và Ta có

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-\left(a.1+b\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a\left(x-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}a=a$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{2\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(x+1\right)}{2}=1$

Vậy $a=1;b=-\dfrac{1}{2}$

Câu20 . $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi}\ \ x\neq 0\\ 0 & \text{khi}\ \ x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 7

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

Vậy $f'(0)=0$.

Câu 21. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0\\ x+x^2 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}.\sin x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+x^2\right)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ và

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+x^2}{x}=1$

Vậy $f'(0)=1$.

Câu 22. $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có hàm số liên tục tại $x_0=-1$ và

$\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$

Nên $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=0$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=2$

Do đó $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

Câu 23. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & khi\ x\ge 0\\ 2x^2+ax+b & khi\ x<0\end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=10,b=11$ **B.** $a=0,b=-1$ **C.** $a=0,b=1$ **D.** $a=20,b=1$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta thấy với $x \neq 0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x = 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Khi đó: $f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0;\quad f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = a$

$\Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy $a = 0, b = 1$ là những giá trị cần tìm.