Vì (1) là mệnh đề đúng nên ta có $f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Vậy (3) là mệnh đề đúng.

Câu 16. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$

(2) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x = 0$

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) đúng. **C.** Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = f(0)$. Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$

Ta có : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{|x|}{x+1} - 0}{x} = \dfrac{|x|}{x(x+1)}$ (với $x \neq 0$)

Do đó : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1 \end{cases}$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi $x \to 0$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = x^2 + |x|$. Xét hai câu sau:

(1). Hàm số trên có đạo hàm tại $< nguyenthuongnd86@gmail.com >$.

(2). Hàm số trên liên tục tại $x = 0$.

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng. **C.** Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + x) = 0$.

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - x) = 0$.

+) $f(0) = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

Mặt khác:

+) $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$.

+) $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$.

$\Rightarrow f'(0^+)\neq f'(0^-)$. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 18. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x \;\; khi \;\; x\geq 1 \\ ax+b \;\; khi \; x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

A. $\begin{cases} a=23 \\ b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=3 \\ b=-11\end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=33 \\ b=-31\end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=3 \\ b=-1\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$

Hàm có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow a+b=2$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax+b-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$ (Do $b=2-a$)

Hàm có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1\end{cases}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi} \;\; x\leq 1 \\ ax+b & \text{khi} \;\; x>1\end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của *a, b* thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

A. $a=1; b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2}; b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}; b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1; b=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x=1$ nên Ta có $a+b=\dfrac{1}{2}$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ nên giới hạn 2 bên của $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ bằng nhau và Ta có

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}a=a$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)}{2}=1$

Vậy $a=1; b=-\dfrac{1}{2}$

Câu20 . $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi} \;\; x\neq 0 \\ 0 & \text{khi} \;\; x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 7

Hướng dẫn giải: