Vậy $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Câu 10. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\ge 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\ne 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ nên $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Do $\lim\limits_{\Delta x^-\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1\ne \lim\limits_{\Delta x^+\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$ nên $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ không tồn tại.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x=2$ thì giá trị của b là

A. $b=3$. **B.** $b=6$. **C.** $b=1$. **D.** $b=-6$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có

- $f(2)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=2b-8$

$f(x)$ có đạo hàm tại $x=2$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2b-8=4\Leftrightarrow b=6.$

Câu 14. Số gia của hàm số $f(x)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là

A. $\Delta x(\Delta x+2x-4)$. **B.** $2x+\Delta x$. **C.** $\Delta x.(2x-4\Delta x)$. **D.** $2x-4\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có

$\Delta y=f(\Delta x+x)-f(x)$

$=(\Delta x+x)^2-4(\Delta x+x)+1-(x^2-4x+1)$

$=\Delta x^2+2\Delta x.x+x^2-4\Delta x-4x+1-x^2+4x-1=\Delta x^2+2\Delta x.x-4\Delta x$

$=\Delta x(\Delta x+2x-4)$

Câu 15. Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba câu trên:

A. Có hai câu đúng và một câu sai. **B.** Có một câu đúng và hai câu sai.
C. Cả ba đều đúng. **D.** Cả ba đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó. Đây là mệnh đề đúng.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Phản ví dụ

Lấy hàm $f(x)=|x|$ ta có $D=\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhưng ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1\end{cases}$

Nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Vậy mệnh đề (2) là mệnh đề sai.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.