Định nghĩa $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ hay $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

A. Đúng (theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm).

B. Đúng vì

$\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=\Delta x+x_0$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x+x_0-x_0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

C. Đúng vì

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0,\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h+x_0-x_0}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Câu 4. Số gia của hàm số $f(x)=x^3$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. **B.** 7. **C.** 19. **D.** -7.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-2^3=x_0^3+(\Delta x)^3+3x_0\Delta x(x_0+\Delta x)-8$.

Với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ thì $\Delta y=19$.

Câu 5. Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x)=2x(x-1)$ theo x và Δx là

A. $4x+2\Delta x+2$.

B. $4x+2(\Delta x)^2-2$.

C. $4x+2\Delta x-2$.

D. $4x\Delta x+2(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{2x(x-1)-2x_0(x_0-1)}{x-x_0}$

$=\dfrac{2(x-x_0)(x+x_0)-2(x-x_0)}{x-x_0}=2x+2x_0-2=4x+2\Delta x-2$

Câu 6. Số gia của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là

A. $\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2-\Delta x\right]$. **C.** $\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2+\Delta x\right]$. **D.** $\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ Ta có

$$\Delta y=\frac{(-1+\Delta x)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1+(\Delta x)^2-2\Delta x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x-\Delta x\right)$.
B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-1)$.
C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+1)$.
D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x+\Delta x\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có :

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)$$

$$=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0-\Delta x-x_0^2+x_0$$

$$=(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x$$

Nên $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$

Vậy $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-1)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}}{x} & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0)=1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).
B. Chỉ (II).
C. Cả hai đều sai.
D. Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi Δx là số gia của đối số tại 0 sao cho $\Delta x>0$.

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta^2 x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x\sqrt{\Delta x}}=+\infty$.

Nên hàm số không có đạo hàm tại 0.

Câu 9. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$