DẠNG 2: BÀI TOÁN TỔNG $\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k b^k$.

Phương pháp 1: Dựa vào khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + a^{n-1}bC_n^1 + a^{n-2}b^2C_n^2 + ... + b^nC_n^n.$$

Ta chọn những giá trị a, b thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

* $C_n^k = C_n^{n-k}$
* $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$
* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$
* $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$
* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = (1+a)^n$.

Phương pháp 2: Dựa vào đẳng thức đặc trưng

Mấu chốt của cách giải trên là ta tìm ra được đẳng thức (*) và ta thường gọi (*) là đẳng thức đặc trưng. Cách giải ở trên được trình bày theo cách xét số hạng tổng quát ở vế trái (thường có hệ số chứa k) và biến đổi số hạng đó có hệ số không chứa k hoặc chứa k nhưng tổng mới dễ tính hơn hoặc đã có sẵn.

Câu 1: Tổng $T = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n$ bằng:

A. $T = 2^n$. **B.** $T = 2^n - 1$. **C.** $T = 2^n + 1$. **D.** $T = 4^n$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tính chất của khai triển nhị thức Niu – Tơn.

Câu 2: Tính giá trị của tổng $S = C_6^0 + C_6^1 + .. + C_6^6$ bằng:

A. 64. **B.** 48. **C.** 72. **D.** 100.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$S = C_6^0 + C_6^1 + ... + C_6^6 = 2^6 = 64$

Câu 3: Khai triển $(x+y)^5$ rồi thay x, y bởi các giá trị thích hợp. Tính tổng $S = C_5^0 + C_5^1 + ... + C_5^5$

A. 32. **B.** 64. **C.** 1. **D.** 12.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với $x = 1, y = 1$ ta có $S = C_5^0 + C_5^1 + ... + C_5^5 = (1+1)^5 = 32$.

Câu 4: Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$

A. 4 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 5

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$

Cho $x = 2$ ta có: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 3^n$

Do vậy ta suy ra $3^n = 243 = 3^5 \Rightarrow n = 5$.

Câu 5: Khai triển $(x+y)^5$ rồi thay x, y bởi các giá trị thích hợp. Tính tổng $S = C_5^0 + C_5^1 + ... + C_5^5$

A. 32. **B.** 64. **C.** 1. **D.** 12.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với $x=1, y=1$ ta có $S = C_5^0 + C_5^1 + ... + C_5^5 = (1+1)^5 = 32$.

Câu 6: Khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$

a) Hãy tính hệ số a_{10}.

A. $a_{10} = C_5^0.+C_5^4 + C_5^4C_5^3$

B. $a_{10} = C_5^0.C_5^5 + C_5^2C_5^4 + C_5^4C_5^3$

C. $a_{10} = C_5^0.C_5^5 + C_5^2C_5^4 - C_5^4C_5^3$

D. $a_{10} = C_5^0.C_5^5 - C_5^2C_5^4 + C_5^4C_5^3$

b) Tính tổng $T = a_0 + a_1 + ... + a_{15}$ và $S = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15}$

A. 131 **B.** 147614 **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = (1+x+x^2+x^3)^5 = (1+x)^5(1+x^2)^5$

a) Do đó hệ số x^{10} bằng: $a_{10} = C_5^0.C_5^5 + C_5^2C_5^4 + C_5^4C_5^3$

b) $T = f(1) = 4^5$; $S = f(-1) = 0$

Câu 7: Khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$

a) Hãy tính hệ số a_4

A. $a_4 = C_{10}^0.2^4$ **B.** $a_4 = 2^4C_{10}^4$ **C.** $a_4 = C_{10}^0C_{10}^4$ **D.** $a_4 = C_{10}^0.2^4C_{10}^4$

b) Tính tổng $S = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + ... + 2^{20}a_{20}$

A. $S = 17^{10}$ **B.** $S = 15^{10}$ **C.** $S = 17^{20}$ **D.** $S = 7^{10}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = (1+2x+3x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{2k}(1+2x)^{10-k}$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{2k} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10-k}^i 2^{10-k-i} x^{10-k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i 3^k 2^{10-k-i} x^{10+k-i}$$

a) Ta có: $a_4 = C_{10}^0.2^4C_{10}^4 +$

b) Ta có $S = f(2) = 17^{10}$

Câu 8: Tính tổng sau: $S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^3 - \frac{1}{8}C_n^4 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n$

A. $\frac{1}{2(n+1)}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\frac{1}{(n+1)}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $S = \frac{1}{2}\left(C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n\right)$

Vì $\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k = \frac{(-1)^k}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ nên: $S = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}$

$$= \frac{-1}{2(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Câu 9: Tính tổng sau: $S=C_n^1 3^{n-1}+2C_n^2 3^{n-2}+3C_n^3 3^{n-3}+...+nC_n^n$

A. $n.4^{n-1}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** 4^{n-1}

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $S=3^n\sum_{k=1}^{n}kC_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k$

Vì $kC_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k=n\left(\frac{1}{3}\right)^k C_{n-1}^{k-1}\quad \forall k\ge 1$ nên

$$S=3^n.n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k C_{n-1}^{k-1}=3^{n-1}.n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k C_{n-1}^{k}=3^{n-1}.n(1+\frac{1}{3})^{n-1}=n.4^{n-1}.$$

Câu 10: Tính các tổng sau: $S_1=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$

A. $\frac{2^{n+1}+1}{n+1}$ **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ **C.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}+1$ **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-1$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1))!}$$

$$=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}\ (*)$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}-C_{n+1}^{0}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Câu 11: Tính các tổng sau: $S_2=C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n$

A. $2n.2^{n-1}$ **B.** $n.2^{n+1}$ **C.** $2n.2^{n+1}$ **D.** $n.2^{n-1}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $kC_n^k=k.\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$

$$=n\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}=nC_{n-1}^{k-1},\ \forall k\ge 1$$

$$\Rightarrow S_2=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}=n.2^{n-1}.$$

Câu 12: Tính các tổng sau: $S_3=2.1.C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n$.

A. $n(n-1)2^{n-2}$ **B.** $n(n+2)2^{n-2}$ **C.** $n(n-1)2^{n-3}$ **D.** $n(n-1)2^{n+2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $k(k-1)C_n^k=\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

$$\Rightarrow S_3=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}=n(n-1)2^{n-2}.$$

Câu 13: Tính tổng $S=C_n^0+\frac{3^2-1}{2}C_n^1+...+\frac{3^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

A. $S=\dfrac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ **B.** $S=\dfrac{4^{n+1}+2^{n+1}}{n+1}-1$

C. $S=\dfrac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}+1$ **D.** $S=\dfrac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}-1$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $S=S_1-S_2$, trong đó

$S_1=C_n^0+\dfrac{3^2}{2}C_n^1+\dfrac{3^3}{3}C_n^2+...+\dfrac{3^{n+1}}{n+1}C_n^n$

$S_2=\dfrac{1}{2}C_n^1+\dfrac{1}{3}C_n^2+...+\dfrac{1}{n+1}C_n^n$

Ta có $S_2=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}-1$

Tính $S_1=?$

Ta có: $\dfrac{3^{k+1}}{k+1}C_n^k=3^{k+1}\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{3^{k+1}}{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}=\dfrac{3^{k+1}}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$\Rightarrow S_1=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}3^{k+1}C_{n+2}^{k+1}-2C_n^0=\dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}3^kC_{n+1}^k-C_n^0\right)-2C_n^0=\dfrac{4^{n+1}-1}{n+1}-2$.

Vậy $S=\dfrac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}-1$.

Câu 14: Tính tổng $S=C_n^0+\dfrac{2^2-1}{2}C_n^1+...+\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

A. $S=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ **B.** $S=\dfrac{3^n-2^{n+1}}{n+1}$ **C.** $S=\dfrac{3^{n+1}-2^n}{n+1}$ **D.** $S=\dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{n+1}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $S=S_1-S_2$

Trong đó $S_1=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{2^{k+1}}{k+1}$; $S_2=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k}{k+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}-1$

Mà $\dfrac{2^{k+1}}{k+1}C_n^k=\dfrac{2^{k+1}}{n+1}C_{n+1}^{k+1}\Rightarrow S_1=\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}-1$

Suy ra: $S=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

Câu 15: Tìm số nguyên dương n sao cho : $C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-...+(2n+1)2^nC_{2n+1}^{2n+1}=2005$

A. $n=1001$ **B.** $n=1002$ **C.** $n=1114$ **D.** $n=102$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $S=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}.k.2^{k-1}C_{2n+1}^k$

Ta có: $(-1)^{k-1}.k.2^{k-1}C_{2n+1}^k==(-1)^{k-1}.(2n+1).2^{k-1}C_{2n}^{k-1}$

Nên $S=(2n+1)(C_{2n}^0-2C_{2n}^1+2^2C_{2n}^2-...+2^{2n}C_{2n}^{2n})=2n+1$

Vậy $2n+1=2005\Leftrightarrow n=1002$.

Câu 16: Tính tổng $1.3^0.5^{n-1}C_n^{n-1}+2.3^1.5^{n-2}C_n^{n-2}+...+n.3^{n-1}5^0C_n^0$

A. $n.8^{n-1}$ **B.** $(n+1).8^{n-1}$ **C.** $(n-1).8^{n}$ **D.** $n.8^{n}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $VT=\sum_{k=1}^{n}k.3^{k-1}.5^{n-k}C_n^{n-k}$

Mà $k.3^{k-1}.5^{n-k}C_n^{n-k}=n.3^{k-1}.5^{n-k}.C_{n-1}^{k-1}$

Suy ra: $VT=n(3^0.5^{n-1}C_{n-1}^0+3^1.5^{n-2}C_{n-1}^1+...+3^{n-1}5^0C_{n-1}^{n-1})$

$=n(5+3)^{n-1}=n.8^{n-1}$

Câu 17: Tính tổng $S=2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n$

A. $n(n+1)2^{n-2}$ **B.** $n(n-1)2^{n-2}$ **C.** $n(n-1)2^{n}$ **D.** $(n-1)2^{n-2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $S=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k$

Mà $k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

Suy ra $S=n(n-1)(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+...+C_{n-2}^{n-2})=n(n-1)2^{n-2}$

Câu 18: Tính tổng $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$

A. C_{2n}^n **B.** C_{2n}^{n-1} **C.** $2C_{2n}^n$ **D.** C_{2n-1}^{n-1}

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\left(x+1\right)^n\left(1+x\right)^n=\left(x+1\right)^{2n}$.

Vế trái của hệ thức trên chính là:

$$\left(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+...+C_n^n\right)\left(C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n\right)$$

Và ta thấy hệ số của x^n trong vế trái là

$$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$$

Còn hệ số của x^n trong vế phải $\left(x+1\right)^{2n}$ là C_{2n}^n

Do đó $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

Câu 19: Tính tổng sau: $S_1=5^nC_n^0+5^{n-1}.3.C_n^{n-1}+3^2.5^{n-2}C_n^{n-2}+...+3^nC_n^0$

A. 28^n **B.** $1+8^n$ **C.** 8^{n-1} **D.** 8^n

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $S_1=(5+3)^n=8^n$

Câu 20: $S_2=C_{2011}^0+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}$

A. $\dfrac{3^{2011}+1}{2}$ **B.** $\dfrac{3^{211}-1}{2}$ **C.** $\dfrac{3^{2011}+12}{2}$ **D.** $\dfrac{3^{2011}-1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2011}=C_{2011}^0+xC_{2011}^1+x^2C_{2011}^2+...+x^{2010}C_{2011}^{2010}+x^{2011}C_{2011}^{2011}$$

Cho $x=2$ ta có được:

$$3^{2011}=C_{2011}^0+2.C_{2011}^1+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}+2^{2011}C_{2011}^{2011}\ (1)$$