PHẦN II – HƯỚNG DẪN GIẢI
NHỊ THỨC NEWTON

A- LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Công thức khai triển nhị thức Newton: *Với mọi n ∈N và với mọi cặp số a, b ta có:*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

2. Tính chất:

1) Số các số hạng của khai triển bằng n + 1

2) Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

3) Số hạng tổng quát (thứ k+1) có dạng: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$ *(k =0, 1, 2, …, n)*

4) Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k=C_n^{n-k}$

5) $C_n^0=C_n^n=1$, $\quad C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$

** Nhận xét: Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn:*

$(1+x)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+...+C_n^n\Rightarrow C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$

$(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+...+(-1)^nC_n^n\Rightarrow C_n^0-C_n^1+...+(-1)^nC_n^n=0$

Từ khai triển này ta có các kết quả sau

* $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$

* $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=0$

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ, SỐ HẠNG TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Phương pháp:

$$\left(ax^p+bx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(ax^p\right)^{n-k}\left(bx^q\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k x^{np-pk+qk}$$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa: $np-pk+qk=m$.

Từ đó tìm $k=\dfrac{m-np}{p-q}$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^k a^{n-k}.b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

Nếu k không nguyên hoặc $k>n$ thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.

Chú ý: Xác định hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển

$P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n$ được viết dưới dạng $a_0+a_1x+...+a_{2n}x^{2n}$.

Ta làm như sau:

* Viết $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$;

* Viết số hạng tổng quát khi khai triển các số hạng dạng $\left(bx^p+cx^q\right)^k$ thành một đa thức theo luỹ thừa của x.

* Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m.
Chú ý: Để xác định hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn
Ta làm như sau:
* Tính hệ số a_k theo k và n;
* Giải bất phương trình $a_{k-1} \le a_k$ với ẩn số k;
* Hệ số lớn nhất phải tìm ứng với số tự nhiên k lớn nhất thoả mãn bất phương trình trên.

Câu 1: Trong khai triển $(2a-b)^5$, hệ số của số hạng thứ 3 bằng:

A. -80. **B.** 80. **C.** -10. **D.** 10.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $(2a-b)^5 = C_5^0(2a)^5 - C_5^1(2a)^4 b + C_5^2(2a)^3 b^2 + ...$

Do đó hệ số của số hạng thứ 3 bằng $C_5^2.8 = 80$.

Câu 2: Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}, (n \in \mathbb{N})$. Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

A. 17. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Trong khai triển $(a+2)^{n+6}, (n \in \mathbb{N})$ có tất cả $n+7$ số hạng.

Do đó $n+7=17 \Leftrightarrow n=10$.

Câu 3: Trong khai triển $(3x^2-y)^{10}$, hệ số của số hạng chính giữa là:

A. $3^4.C_{10}^4$. **B.** $-3^4.C_{10}^4$. **C.** $3^5.C_{10}^5$. **D.** $-3^5.C_{10}^5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Trong khai triển $(3x^2-y)^{10}$ có tất cả 11 số hạng nên số hạng chính giữa là số hạng thứ 6.

Vậy hệ số của số hạng chính giữa là $-3^5.C_{10}^5$.

Câu 4: Trong khai triển $(2x-5y)^8$, hệ số của số hạng chứa $x^5.y^3$ là:

A. -22400. **B.** -40000. **C.** -8960. **D.** -4000.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = (-1)^k C_8^k.(2x)^{8-k}(5y)^k = (-1)^k C_8^k.2^{8-k}5^k.x^{8-k}.y^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k=3$. Khi đó hệ số của số hạng chứa $x^5.y^3$ là: -22400.

Câu 5: Trong khai triển $\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của $x^3, (x>0)$ là:

A. 60. **B.** 80. **C.** 160. **D.** 240.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_6^k.x^{6-k}2^k.x^{-\frac{1}{2}k}$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $6-k-\dfrac{1}{2}k = 3 \Leftrightarrow k=3$.

Khi đó hệ số của x^3 là: $C_6^3.2^3 = 160$.

Câu 6: Trong khai triển $\left(a^2+\dfrac{1}{b}\right)^7$, số hạng thứ 5 là:

A. $35.a^6.b^{-4}$. **B.** $-35.a^6.b^{-4}$. **C.** $35.a^4.b^{-5}$. **D.** $-35.a^4.b$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_7^k.a^{14-2k}.b^{-k}$

Vậy số hạng thứ 5 là $T_5=C_7^4.a^6.b^{-4}=35.a^6.b^{-4}$

Câu 7: Trong khai triển $(2a-1)^6$, tổng ba số hạng đầu là:

A. $2a^6-6a^5+15a^4$. **B.** $2a^6-15a^5+30a^4$.
C. $64a^6-192a^5+480a^4$. **D.** $64a^6-192a^5+240a^4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $(2a-1)^6=C_6^0.2^6a^6-C_6^1.2^5a^5+C_6^2.2^4a^4-...$

Vậy tổng 3 số hạng đầu là $64a^6-192a^5+240a^4$.

Câu 8: Trong khai triển $\left(x-\sqrt{y}\right)^{16}$, tổng hai số hạng cuối là:

A. $-16x\sqrt{y^{15}}+y^8$. **B.** $-16x\sqrt{y^{15}}+y^4$. **C.** $16xy^{15}+y^4$. **D.** $16xy^{15}+y^8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\left(x-\sqrt{y}\right)^{16}=C_{16}^0x^{16}-C_{16}^1x^{15}.\sqrt{y}+...-C_{16}^{15}x\left(\sqrt{y}\right)^{15}+C_{16}^{16}\left(\sqrt{y}\right)^{16}$

Câu 9: Trong khai triển $\left(8a^2-\frac{1}{2}b\right)^6$, hệ số của số hạng chứa a^9b^3 là:

A. $-80a^9.b^3$. **B.** $-64a^9.b^3$. **C.** $-1280a^9.b^3$. **D.** $60a^6.b^4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=(-1)^kC_6^k.8^{6-k}a^{12-2k}.2^{-k}b^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k=3$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa a^9b^3 là: $-1280a^9.b^3$.

Câu 10: Trong khai triển $\left(x+\frac{8}{x^2}\right)^9$, số hạng không chứa x là:

A. 4308. **B.** 86016. **C.** 84. **D.** 43008.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_9^k.x^{9-k}8^k.x^{-2k}$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $9-k-2k=0\Leftrightarrow k=3$.

Khi đó số hạng không chứa x là: $C_9^3.8^3=43008$.

Câu 11: Trong khai triển $(2x-1)^{10}$, hệ số của số hạng chứa x^8 là:

A. -11520. **B.** 45. **C.** 256. **D.** 11520.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_{10}^k.2^{10-k}.x^{10-k}.(-1)^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $10-k=8\Leftrightarrow k=2$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa x^8 là: $C_{10}^2.2^8=11520$.

Câu 12: Trong khai triển $(a-2b)^8$, hệ số của số hạng chứa $a^4.b^4$ là:

A. 1120. **B.** 560. **C.** 140. **D.** 70.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_8^k.a^{8-k}.(-2)^k.b^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k = 4$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa $a^4.b^4$ là: $C_8^4.2^4 = 1120$.

Câu 13: Trong khai triển $(3x - y)^7$, số hạng chứa x^4y^3 là:

A. $-2835x^4y^3$. **B.** $2835x^4y^3$. **C.** $945x^4y^3$. **D.** $-945x^4y^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_7^k.3^{7-k}x^{7-k}.(-1)^k.y^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k = 3$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa $x^4.y^3$ là: $-C_7^3.3^4.x^4.y^3 = -2835.x^4.y$.

Câu 14: Trong khai triển $(0,2 + 0,8)^5$, số hạng thứ tư là:

A. $0,0064$. **B.** $0,4096$. **C.** $0,0512$. **D.** $0,2048$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_5^k.(0,2)^{5-k}.(0,8)^k$

Vậy số hạng thứ tư là $T_4 = C_5^3.(0,2)^2.(0,8)^3 = 0,2028$

Câu 15: Hệ số của x^3y^3 trong khai triển $(1+x)^6(1+y)^6$ là:

A. 20. **B.** 800. **C.** 36. **D.** 400.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_6^k.x^k.C_6^m.y^m$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k = m = 3$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa x^3y^3 là: $C_6^3.C_6^3 = 400$.

Câu 16: Số hạng chính giữa trong khai triển $(3x + 2y)^4$ là:

A. $C_4^2x^2y^2$. **B.** $6(3x)^2(2y)^2$. **C.** $6C_4^2x^2y^2$. **D.** $36C_4^2x^2y^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng chính giữa trong khai triển trên là số hạng thứ ba: $C_4^2(3x)^2(2y)^2 = 6(3x)^2(2y)^2$.

Câu 17: Trong khai triển $(x - y)^{11}$, hệ số của số hạng chứa $x^8.y^3$ là

A. C_{11}^3. **B.** $-C_{11}^3$. **C.** $-C_{11}^5$. **D.** C_{11}^8.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = C_{11}^k.x^{11-k}.(-1)^k.y^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k = 3$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa $x^8.y^3$ là: $-C_{11}^3$.

Câu 18: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $f(x) = (1-2x)^{10}$

A. -15360 **B.** 15360 **C.** -15363 **D.** 15363

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $f(x)=\sum_{k=0}^{10} C_n^k 1^{10-k}(-2x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-2)^k x^k$

Số hạng chứa x^7 ứng với giá trị $k=7$

Vậy hệ số của x^7 là: $C_{10}^7(-2)^7=-15360$.

Câu 19: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $h(x)=x(2+3x)^9$

A. 489889 **B.** 489887 **C.** –489888 **D.** 489888

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $(2+3x)^9=\sum_{k=0}^{9} C_9^k 2^{9-k}(3x)^k = \sum_{k=0}^{9} C_9^k 2^{9-k}3^k.x^k$

$\Rightarrow h(x)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k 2^{9-k}3^k x^{k+1}$.

Số hạng chứa x^7 ứng với giá trị k thỏa $k+1=7 \Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số chứa x^7 là: $C_9^6 2^3 3^6=489888$.

Câu 20: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $g(x)=(1+x)^7+(1-x)^8+(2+x)^9$

A. 29 **B.** 30 **C.** 31 **D.** 32

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^7=\sum_{k=0}^{7} C_7^k x^k$ là : $C_7^7=1$

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1-x)^8=\sum_{k=0}^{8} C_8^k(-1)^k x^k$ là : $C_8^7(-1)^7=-8$

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^9=\sum_{k=0}^{9} C_9^k x^k$ là : $C_7^9=36$.

Vậy hệ số chứa x^7 trong khai triển $g(x)$ thành đa thức là: 29.

Chú ý:

* Với $a\neq 0$ ta có: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ với $n\in\mathbb{N}$.

* Với $a\geq 0$ ta có: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ với $m,n\in\mathbb{N}; n\geq 1$.

Câu 21: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $f(x)=(3+2x)^{10}$

A. 103680 **B.** 1301323 **C.** 131393 **D.** 1031831

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $f(x)=\sum_{k=0}^{10} C_n^k 3^{10-k}(2x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^{10-k}(-2)^k x^k$

Số hạng chứa x^8 ứng với giá trị $k=8$

Vậy hệ số của x^8 là: $C_{10}^8.3^2.(-2)^8=103680$.

Câu 22: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $h(x)=x(1-2x)^9$

A. –4608 **B.** 4608 **C.** –4618 **D.** 4618

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $(1-2x)^9=\sum_{k=0}^{9} C_9^k 1^{9-k}(-2x)^k = \sum_{k=0}^{9} C_9^k(-2)^k.x^k$

$\Rightarrow h(x)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k(-2)^k x^{k+1}$.

Số hạng chứa x^8 ứng với giá trị k thỏa $k+1=8 \Leftrightarrow k=7$

Vậy hệ số chứa x^8 là: $C_9^7(-2)^7=-4608$.

Câu 23: Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x)=(3x^2+1)^{10}$

A. 17010 **B.** 21303 **C.** 20123 **D.** 21313

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{2k}$, số hạng chứa x^8 ứng với $k=4$ nên hệ số x^8 là: $C_{10}^4.3^4=17010$.

Câu 24: Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x)=\left(\frac{2}{x}-5x^3\right)^8$

A. 1312317 **B.** 76424 **C.** 427700 **D.** 700000

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{8} C_8^k 2^{8-k}(-5)^k x^{4k-8}$, số hạng chứa x^8 ứng với $k=4$ nên hệ số của x^8 là:

$C_8^4.2^4.(-5)^4=700000$.

Câu 25: Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x)=\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{2}\right)^{12}$

A. $\frac{297}{512}$ **B.** $\frac{29}{51}$ **C.** $\frac{27}{52}$ **D.** $\frac{97}{12}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^{12-k}.2^{-k}.x^{2k-12}$, số hạng chứa x^8 ứng với $k=10$ nên hệ số của x^8 là:

$C_{12}^{10}.3^2.2^{-10}=\frac{297}{512}$.

Câu 26: Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x)=(1+x+2x^2)^{10}$

A. 37845 **B.** 14131 **C.** 324234 **D.** 131239

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(2x^2)^{10-k}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{10}\sum_{j=0}^{k} C_{10}^k C_k^j.2^{10-k}x^{20-2k+j}$

Số hạng chứa x^8 ứng với cặp (k,j) thỏa: $\begin{cases}0\le j\le k\le 10\\ j=2k-12\end{cases}$

Nên hệ số của x^8 là:

$C_{10}^6C_6^0.2^4+C_{10}^7C_7^2 2^3+C_{10}^8C_8^4 2^2+C_{10}^9C_9^6 2+C_{10}^{10}C_{10}^8=37845$

Câu 27: Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x)=8(1+8x)^8-9(1+9x)^9+10(1+10x)^{10}$

A. $8.C_8^0.8^8-C_9^1.9^8+10.C_{10}^8.10^8$ **B.** $C_8^0.8^8-C_9^1.9^8+C_{10}^8.10^8$

C. $C_8^0.8^8-9.C_9^1.9^8+10.C_{10}^8.10^8$ **D.** $8.C_8^0.8^8-9.C_9^1.9^8+10.C_{10}^8.10^8$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $(1+8x)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k 8^{8-k}x^{8-k}$

$(1+9x)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k 9^{9-k}x^{9-k}$

$(1+10x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k 10^{10-k}x^{10-k}$

Nên hệ số chứa x^8 là: $8.C_8^0.8^8-9.C_9^1.9^8+10.C_{10}^8.10^8$

Câu 28: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển biểu thức sau: $g(x)=8(1+x)^8+9(1+2x)^9+10(1+3x)^{10}$

A. 22094 **B.** 139131 **C.** 130282 **D.** 21031

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $(1+ax)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^k a^k x^k$ nên ta suy ra hệ số của x^k trong khai triển $(1+ax)^n$ là $C_n^k a^k$. Do đó:

Hệ số của x^8 trong khai triển $(1+x)^8$ là : C_8^8

Hệ số của x^8 trong khai triển $(1+2x)^9$ là : $C_9^8.2^8$

Hệ số của x^8 trong khai triển $(1+3x)^{10}$ là : $C_{10}^8.3^8$.

Vậy hệ số chứa x^8 trong khai triển $g(x)$ thành đa thức là: $8C_8^8+9.2^8.C_9^8+10.3^8.C_{10}^8=22094$.

Câu 29: Hệ số đứng trước $x^{25}.y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$ là:

A. 2080. **B.** 3003. **C.** 2800. **D.** 3200.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_{15}^k.x^{45-3k}.x^k.y^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k=10$.

Vậy hệ số đứng trước $x^{25}.y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$ là: $C_{15}^{10}=3003$.

Câu 30: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$ là:

A. C_{18}^9. **B.** C_{18}^{10}. **C.** C_{18}^8. **D.** C_{18}^3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_{18}^k.x^{54-3k}.x^{-3k}$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $54-3k-3k=0\Leftrightarrow k=9$.

Khi đó số hạng không chứa là: C_{18}^9.

Câu 31: Khai triển $\left(1-x\right)^{12}$, hệ số đứng trước x^7 là:

A. 330. **B.** -33. **C.** -72. **D.** -792.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1}=C_{12}^k.\left(-1\right)^k.x^k$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $k=7$.

Khi đó hệ số của số hạng chứa x^7 là: $-C_{12}^7=-792$.

Câu 32: Tìm số hạng không chứa x trong các khai triển sau: $f(x)=(x-\dfrac{2}{x})^{12}\quad (x\neq 0)$

A. 59136 **B.** 213012 **C.** 12373 **D.** 139412

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f(x)=(x-2.x^{-1})^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{12-k}.(-2x^{-1})^{k}$

$\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}(-2)^{k}x^{12-2k}$

Số hạng không chứa x ứng với giá trị k thỏa mãn: $12-2k=0$

$\Leftrightarrow k=6\Rightarrow$ số hạng không chứa x là: $C_{12}^{6}.2^{6}=59136$.

Câu 33: Tìm số hạng không chứa x trong các khai triển sau: $g(x)=(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3})^{17}\quad(x>0)$

A. 24310 **B.** 213012 **C.** 12373 **D.** 139412

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Vì $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$ nên ta có

$f(x)=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^{k}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}.\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^{k}.x^{\frac{17k-136}{12}}$

Hệ số không chứa x ứng với giá trị k thỏa: $17k-136=0\Leftrightarrow k=8$

Vậy hệ số không chứa x là: $C_{17}^{8}=24310$.

Câu 34: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

A. 495 **B.** 313 **C.** 1303 **D.** 13129

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)\Leftrightarrow\left(C_{n+3}^{n}+C_{n+3}^{n+1}\right)-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$

$\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1}=7(n+3)\Leftrightarrow\frac{(n+2)(n+3)}{2!}=7(n+3)$

$\Leftrightarrow n+2=7.2!=14\Leftrightarrow n=12$.

Khi đó: $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(x^{-3}\right)^{k}.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{\frac{60-11k}{2}}$.

Số hạng chứa x^8 ứng với k thỏa: $\frac{60-11k}{2}=8\Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là: $C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=495$.

Câu 35: Xác định số hạng không phụ thuộc vào x khi khai triển biểu thức $\left[\frac{1}{x}-\left(x+x^2\right)\right]^n$ với n là số nguyên dương thoả mãn

$C_n^3+2n=A_{n+1}^2$.(C_n^k, A_n^k tương ứng là số tổ hợp, số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

A. -98 **B.** 98 **C.** -96 **D.** 96

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $C_n^3+2n=A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} n\ge 3 \\ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}+2n=(n+1)n \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n\ge 3 \\ n^2-9n+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow n=8$.

Theo nhị thức Newton ta có:

$\left[\frac{1}{x}-(x+x^2)\right]^8=\left[\frac{1}{x}-x(1+x)\right]^8=C_8^0\frac{1}{x^8}-C_8^1\frac{1}{x^6}(1+x)+$

$+C_8^2\frac{1}{x^4}(1+x)^2-C_8^3\frac{1}{x^2}(1+x)^3+C_8^4(1+x)^4-...+C_8^8x^8(1+x)^8$

Số hạng không phụ thuộc vào x chỉ có trong hai biểu thức

$-C_8^3\frac{1}{x^2}(1+x)^3$ và $C_8^4(1+x)^4$.

Trong đó có hai số hạng không phụ thuộc vào x là: $-C_8^3.C_3^2$ và $C_8^4.C_4^0$

Do đó số hạng không phụ thuộc vào x là: $-C_8^3.C_3^2+C_8^4.C_4^0=-98$.

Câu 36: Trong khai triển $f(x)=\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$, hãy tìm hệ số của x^{31}

A. 9880 **B.** 1313 **C.** 14940 **D.** 1147

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 37: Hãy tìm trong khai triển nhị thức $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ số hạng độc lập đối với x

A. 9880 **B.** 1313 **C.** 14940 **D.** 48620

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$C_{18}^9=48620$

Câu 38: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$

A. $\frac{55}{9}$ **B.** $\frac{13}{2}$ **C.** $\frac{621}{113}$ **D.** $\frac{1412}{3123}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$\frac{1}{3^8}(-3)^4C_{12}^4=\frac{55}{9}$

Câu 39: Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$

A. 300123 **B.** 121148 **C.** 3003 **D.** 1303

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$C_{15}^{10}=3003$

Câu 40: Cho đa thức $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+...+20(1+x)^{20}$ có dạng khai triển là

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{20}x^{20}$.

Hãy tính hệ số a_{15}.

A. 400995 **B.** 130414 **C.** 511313 **D.** 412674

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$a_{15}=\sum_{k=15}^{20}kC_k^{15}=400995$$

Câu 41: Tìm số hạng của khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ là một số nguyên

A. 8 và 4536 **B.** 1 và 4184 **C.** 414 và 12 **D.** 1313

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^{9-k}$

Số hạng là số nguyên ứng với các giá trị của k thỏa:

$$\begin{cases}k=2m\\9-k=3n\Leftrightarrow k=0,k=6\\k=0,...,9\end{cases}$$

Các số hạng là số nguyên: $C_9^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8$ và $C_9^6\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$

Câu 42: Xét khai triển $f(x)=(2x+\frac{1}{x})^{20}$

1. Viết số hạng thứ $k+1$ trong khai triển

A. $T_{k+1}=C_{20}^k.2^{20-k}.x^{20-k}$ **B.** $T_{k+1}=C_{10}^k.2^{20-k}.x^{20-2k}$

C. $T_{k+1}=C_{20}^k.2^{20-4k}.x^{20-2k}$ **D.** $T_{k+1}=C_{20}^k.2^{20-k}.x^{20-2k}$

2. Số hạng nào trong khai triển không chứa x

A. $C_{20}^1.2^{10}$ **B.** $A_{20}^{10}.2^{10}$ **C.** $C_{20}^{10}.2^4$ **D.** $C_{20}^{10}.2^{10}$

Hướng dẫn giải:

1. Ta có: $T_{k+1}=C_{20}^k(2x)^{20-k}\frac{1}{x^k}=C_{20}^k.2^{20-k}.x^{20-2k}$

2. Số hạng không chứa x ứng với k: $20-2k=0\Leftrightarrow k=10$

Số hạng không chứa x: $C_{20}^{10}.2^{10}$

Câu 43: Xác định hệ số của x^4 trong khai triển sau: $f(x)=(3x^2+2x+1)^{10}$.

A. 8089 **B.** 8085 **C.** 1303 **D.** 11312

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$f(x)=\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(2x+3x^2\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i(2x)^{k-i}.(3x^2)^i=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i2^{k-i}.3^ix^{k+i}$$

với $0\le i\le k\le 10$.

Do đó $k+i=4$ với các trường hợp $i=0,k=4$ hoặc $i=1,k=3$ hoặc $i=k=2$.

Vậy hệ số chứa x^4: $2^4C_{10}^4.C_4^0+2^23^1C_{10}^3.C_3^1+3^2C_{10}^2.C_2^2=8085$.

Câu 44: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn : $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

A. 2099529 **B.** -2099520 **C.** -2099529 **D.** 2099520

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} = 2^{2n+1} \\ \sum_{i=0}^{n} C_{2n+1}^{2i+1} = \sum_{i=0}^{n} C_{2n+1}^{2i} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} C_{2n+1}^{2i+1} = 2^{2n} = 1024 \Rightarrow n = 5$

Suy ra $(2-3x)^{2n} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} 2^{10-k}.(-3)^k x^k$

Hệ số của x^7 là $C_{10}^{7}.2^3.(-3)^7 = -2099520$.

Câu 45: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $f(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$

A. 8089 **B.** 8085 **C.** 3003 **D.** 11312

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hệ số của x^9: $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 3003$.

Câu 46: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của: $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

A. 3320 **B.** 2130 **C.** 3210 **D.** 1313

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $f(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

Ta có : $f(x) = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k (-2)^k .x^k + x^2 \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (3x)^i$

$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k (-2)^k .x^{k+1} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i 3^i.x^{i+2}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của $f(x)$ ứng với $k=4$ và $i=3$ là:

$C_5^4(-2)^4 + C_{10}^3.3^3 = 3320$.

Câu 47: Tìm hệ số cuả x^8 trong khai triển đa thức $f(x) = \left[1+x^2(1-x)\right]^8$

A. 213 **B.** 230 **C.** 238 **D.** 214

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Cách 1

$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = C_8^0 + C_8^1 x^2(1-x) + C_8^2 x^4 (1-x)^2 + C_8^3 x^6 (1-x)^3$

$+ C_8^4 x^8 (1-x)^4 + C_8^5 x^{10}(1-x)^5 ... + C_8^8 x^{16}(1-x)^8$

Trong khai triển trên ta thấy bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8. Do đó x^8 chỉ có trong số hạng thứ tư, thứ năm với hệ số tương ứng là: $C_8^3.C_3^2$, $C_8^4.C_4^0$.

Vậy hệ số cuả x^8 trong khai triển đa thức $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$ là:

$$a_8 = C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238.$$

Cách 2: Ta có:

$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = \sum_{n=0}^{8} C_8^n x^{2n}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{8} C_8^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2n+k}$

với $0 \le k \le n \le 8$.

Số hạng chứa x^8 ứng với $2n+k=8 \Rightarrow k = 8-2n$ là một số chẵn.

Thử trực tiếp ta được $k=0; n=4$ và $k=2, n=3$.

Vậy hệ số của x^8 là $C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238$.

Câu 48: Đa thức $P(x)=\left(1+3x+2x^2\right)^{10} = a_0 + a_1x + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15}

A. $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.3^5 + C_{10}^9.C_9^6.3^3 + C_{10}^8.C_8^7.3.$

B. $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.2^5 + C_{10}^9.C_9^6.2^6 + C_{10}^8.C_8^7.2^7$

C. $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.3^5.2^5 + C_{10}^9.C_9^6.3^3.2^6 + C_{10}^8.C_8^7.2^7$

D. $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.3^5.2^5 + C_{10}^9.C_9^6.3^3.2^6 + C_{10}^8.C_8^7.3.2^7$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $P(x)=\left(1+3x+2x^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(3x+2x^2\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (3x)^{k-i}.(2x^2)^i = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i .3^{k-i}.2^i x^{k+i}$

với $0 \le i \le k \le 10$. Do đó $k+i=15$ với các trường hợp

$k=10, i=5$ hoặc $k=9, i=6$ hoặc $k=8, i=7$

Vậy $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.3^5.2^5 + C_{10}^9.C_9^6.3^3.2^6 + C_{10}^8.C_8^7.3.2^7$.

Câu 49: Tìm hệ số không chứa x trong các khai triển sau $(x^3 - \frac{2}{x})^n$, biết rằng $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$ với $x>0$

A. -112640 **B.** 112640 **C.** -112643 **D.** 112643

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!1!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 78$

$\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12$.

Khi đó: $f(x) = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{36-4k}$

Số hạng không chứa x ứng với $k: 36-4k=0 \Rightarrow k=9$

Số hạng không chứa x là: $(-2)^9 C_{12}^9 = -112640$

Câu 50: Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

A. n=5 **B.** n=4 **C.** n=3 **D.** n=2

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: Ta có :

$\left(x^2+1\right)^n = C_n^0 x^{2n} + C_n^1 x^{2n-2} + C_n^2 x^{2n-4} + ... + C_n^n$

$\left(x+2\right)^n = C_n^0 x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + ... + 2^n C_n^n$

Dễ dàng kiểm tra $n=1$, $n=2$ không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với $n \ge 3$ thì dựa vào khai triển ta chỉ có thể phân tích

$x^{3n-3} = x^{2n}.x^{n-3} = x^{2n-2}.x^{n-1}$

Do đó hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của

$\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$ là : $a_{3n-3}=2^3.C_n^0.C_n^3+2.C_n^1.C_n^1$.

Suy ra $a_{3n-3}=26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3}=26n \Leftrightarrow n=-\dfrac{7}{2}$ hoặc $n=5$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

Ta có: $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n=x^{3n}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^n$

$$=x^{3n}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^i\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k=x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{-2i}\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kx^{-k}\right]$$

Trong khai triển trên, luỹ thừa của x là $3n-3$ khi $-2i-k=-3 \Leftrightarrow 2i+k=3$.

Ta chỉ có hai trường hợp thoả mãn điều kiện này là $i=0, k=3$ hoặc $i=1, k=1$(vì i,k nguyên).

Hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$

Là : $a_{3n-3}=C_n^0.C_n^3.2^3+C_n^1.C_n^1.2$.

Do đó $a_{3n-3}=26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3}=26n \Leftrightarrow n=-\dfrac{7}{2}$ hoặc $n=5$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 51: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

A. 210 **B.** 213 **C.** 414 **D.** 213

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Do $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k} \quad \forall k=0,1,2,...,2n+1$

$\Rightarrow C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$

Mặt khác: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$

$\Rightarrow 2(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n)=2^{2n+1}$

$\Rightarrow C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{2n}-C_{2n+1}^0=2^{2n}-1$

$\Rightarrow 2^{2n}-1=2^{20}-1 \Rightarrow n=10$.

Khi đó: $\left(\dfrac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\left(x^{-4}+x^7\right)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^{-4})^{10-k}.x^{7k}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^kx^{11k-40}$

Hệ số chứa x^{26} ứng với giá trị k: $11k-40=26 \Rightarrow k=6$.

Vậy hệ số chứa x^{26} là: $C_{10}^6=210$.

Câu 52: Cho $n\in\mathbb{N}^*$ và $(1+x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên k $(1\le k\le n-1)$ sao cho $\dfrac{a_{k-1}}{2}=\dfrac{a_k}{9}=\dfrac{a_{k+1}}{24}$. Tính $n=?$.

A. 10 **B.** 11 **C.** 20 **D.** 22

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $a_k = C_n^k$, suy ra hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{1}{9}\dfrac{n!}{(n-k)!k!} \\ \dfrac{1}{9}\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{1}{24}\dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9k = 2(n-k+1) \\ 24(k+1) = 9(n-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-11k = -2 \\ 9n-33k = 24 \end{cases} \Leftrightarrow n = 10, k = 2$.

Câu 53: Trong khai triển của $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x)^{10}$ thành đa thức

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$).

A. $a_{10} = 3003\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ **B.** $a_5 = 3003\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ **C.** $a_4 = 3003\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$ **D.** $a_9 = 3003\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{15-k}\left(\dfrac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \dfrac{2^k}{3^{15}}x^k$

Hệ số của x^k trong khai triển $a_k = \dfrac{1}{3^{15}}C_{15}^k 2^k$

Ta có: $a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1}2^{k-1} < C_{15}^k 2^k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1} < 2C_{15}^k$

$\Leftrightarrow k < \dfrac{32}{3} \Rightarrow k \le 10$. Từ đó: $a_0 < a_1 < ... < a_{10}$

Đảo dấu bất đẳng thức trên, ta được:

$a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow k > \dfrac{32}{3} \Rightarrow a_{10} > a_{11} > ... > a_{15}$

Vậy hệ số lớn nhất phải tìm là: $a_{10} = \dfrac{2^{10}}{3^{15}}C_{15}^{10} = 3003\dfrac{2^{10}}{3^{15}}$.

Câu 54: Giả sử $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, biết rằng $a_0 + a_1 + ... + a_n = 729$. Tìm n và số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

A. n=6, $\max\{a_k\} = a_4 = 240$ **B.** n=6, $\max\{a_k\} = a_6 = 240$

C. n=4, $\max\{a_k\} = a_4 = 240$ **D.** n=4, $\max\{a_k\} = a_6 = 240$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $a_0 + a_1 + ... + a_n = (1+2.1)^n = 3^n = 729 \Rightarrow n = 6$

$a_k = C_6^k 2^k$ suy ra $\max\{a_k\} = a_4 = 240$.

Câu 55: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$, biết các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn hệ thức: $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$.

A. 126720 **B.** 213013 **C.** 130272 **D.** 130127

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

$\Rightarrow a_0 + \dfrac{a_1}{2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^n \Rightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$