DẠNG 2: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA (α) VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT (α) VỚI MỘT MẶT PHẲNG (β) CHO TRƯỚC.

Phương pháp:

- Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau.
- Khi $(\alpha)\parallel(\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng (§3)

Sử dụng $\begin{cases}(\alpha)\parallel(\beta)\\(\beta)\parallel(\gamma)\\(\beta)\cap(\gamma)=d\\M\in(\alpha)\cap(\gamma)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(\gamma)=d'\parallel d, M\in d'$.

- Tìm đường thẳng d mằn trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d, khi đó $(\alpha)\parallel d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

A. Tam giác **B.** Hình thang **C.** Hình bình hành **D.** Tứ giác

Hướng dẫn giải::

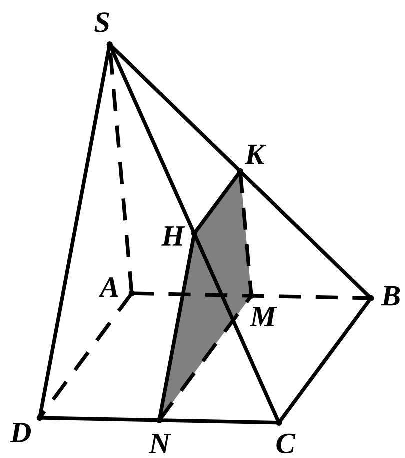
Ta có $\begin{cases}M\in(SAB)\cap(\alpha)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow(SAB)\cap(\alpha)=MK\parallel SA, K\in SB$.

Tương tự $\begin{cases}N\in(SCD)\cap(\alpha)\\(\alpha)\parallel(SAD)\\(SCD)\cap(SAD)=SD\end{cases}$

$\Rightarrow(SCD)\cap(\alpha)=NH\parallel SD, H\in SC$.

Dễ thấy $HK=(\alpha)\cap(SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN\parallel BC\Rightarrow MN\parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.



Câu 2: Cho hìh chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC=a, BD=b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI=x$ $(0<x<a)$.

a) thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình gì?

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.

Hướng dẫn giải::

a) ***Trường hợp 1.*** Xét I thuộc đoạn OA

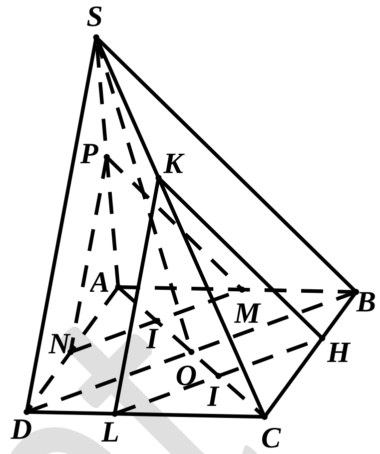
Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha)\cap(ABD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD)\cap(SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha)\cap(ABD) = MN \parallel BD, I \in MN$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha)\cap(SAD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAD)\cap(SBD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD)\cap(\alpha) = NP \parallel SD, P \in SN$.

Thiết diện là tam giác MNP.



Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB)\cap(SBD) = SB \Rightarrow MP \parallel SB \\ (SAB)\cap(\alpha) = MP \end{cases}$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như (hv).

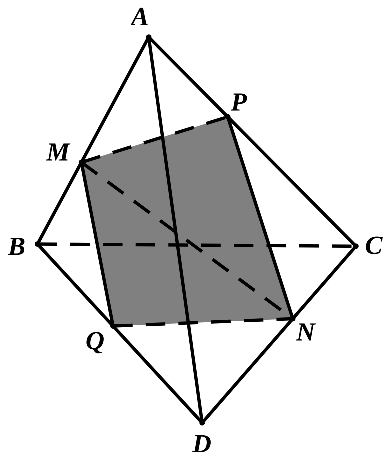
b) ***Trường hợp 1.*** I thuộc đoạn OA

Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}, \dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$S_{MNP} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2 S_{BCD} = [\dfrac{2(a-x)}{a}]^2 \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.



Vậy $S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OA) \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OC) \end{cases}$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay trên các cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND} > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC. thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

c) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

A. $\dfrac{k}{k+1}$ **B.** $\dfrac{2k}{k+1}$ **C.** $\dfrac{1}{k}$ **D.** $\dfrac{1}{k+1}$

Hướng dẫn giải::

a) Do $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN, AC, BD cùng song song với một mặt phẳng (β).Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)\,||\,(\beta)$ suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

b) Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP\,||\,BC$ nên $BC\,||\,(MNP)$.

Ta có :

$$\begin{cases} N\in(MNP)\cap(BCD) \\ BC\,||\,(MNP) \\ BC\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD)\cap(MNP)=NQ\,||\,BC, Q\in BD.$$

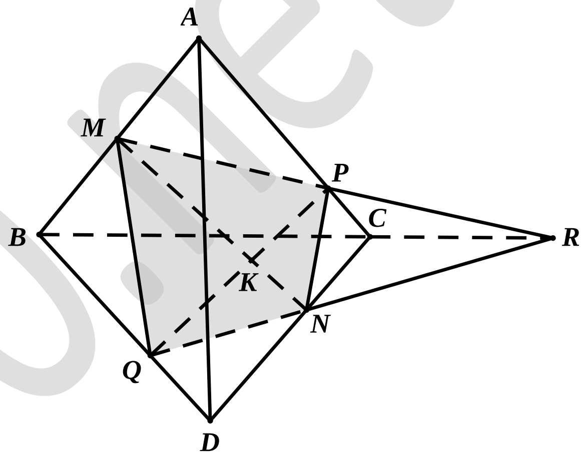
Thiết diện là tứ giác $MPNQ$.Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}\neq k$

Trong (ABC) gọi $R=BC\cap MP$

Trong (BCD) gọi $Q=NR\cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K=MN\cap PQ$

Ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}}=\frac{PK}{PQ}$.



Do $\frac{AM}{NB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được $\frac{PK}{KQ}=\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}=k \Rightarrow \frac{PK}{PQ}=\frac{PK}{PK+KQ}=\frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ}+1}=\frac{k}{k+1}$.