

Câu 29. Chọn đáp án D

$$y = \frac{3}{1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}} \leq \frac{3}{1 + \sqrt{2 + 0}} = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}; y = \frac{3}{1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}} \geq \frac{3}{1 + \sqrt{2 + 1}} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\text{Suy ra } \min y = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}; \max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}.$$

Câu 30. Chọn đáp án C

$$y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \leq 2 \cdot 1 + 3 = 5; y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \geq 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$\text{Suy ra } \min y = 1; \max y = 5$$

Câu 31. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có: } 3 - 2 \sin^2 2x = 1 + 2(1 - \sin^2 2x) = 1 + 2 \cos^2 2x$$

$$1 \leq 1 + 2 \cos^2 2x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1 + 2 \cos^2 2x} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 5 \leq y \leq 4 + \sqrt{3}$$

Câu 32. Chọn đáp án C

$$\text{Ta có: } 2 - \sin^2 x = 1 + 1 - \sin^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\begin{cases} 1 \leq \sqrt{1 + \cos^2 x} \leq 2 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \text{ Cộng từng vế ta được: } 0 \leq y \leq 3.$$

Câu 33. Chọn đáp án B

Đặt $t = \tan x \Rightarrow y = t^2 - 4t + 1$. Hàm số bậc hai $ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ đạt GTNN tại đỉnh parabol có hoành độ $t = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow \min y = y(2) = -3$.

Câu 34. Chọn đáp án D

$$\text{ĐKXD: } 5 \sin 4x - 6 \cos 4x + 2m - 1 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2m \geq 5 \sin 4x - 6 \cos 4x + 2m - 1, \forall x$$

$$\Leftrightarrow 2m \geq \max(y = 6 \cos 4x - 5 \sin 4x + 1).$$

$$y = \sqrt{61} \left(\frac{6}{\sqrt{61}} \cos 4x - \frac{5}{\sqrt{61}} \sin 4x \right) + 1 = \sqrt{61} \sin(\alpha - 4x) + 1 \text{ với } \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}.$$

$$\Rightarrow y \leq \sqrt{61} + 1 \Rightarrow \max y = \sqrt{61} + 1 \Rightarrow m \geq \frac{\sqrt{61} + 1}{2}.$$

Câu 35. Chọn đáp án C

$$-3 \leq 3 \sin 3x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 5$$

Câu 36. Chọn đáp án D

$$y = 1 - 4\sin^2 2x = 4(1 - \sin^2 2x) - 3 = 4\cos^2 2x - 3 \longrightarrow 0 \leq 4\cos^2 2x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1$$

Câu 37. Chọn đáp án C

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 3 + 2\sin x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{3 + 2\sin x} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 1 + \sqrt{5}$$

Câu 38. Chọn đáp án A

$$0 \leq \sin^2 4x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2 + \sin^2 4x \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2 + \sin^2 2x} \leq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{2} \leq y \leq 3 + 2\sqrt{3}$$

Câu 39. Chọn đáp án B

$$y = 4\sin 3x - 3\cos 3x + 1 = 5\left(\frac{4}{5}\sin 3x - \frac{3}{5}\cos 3x\right) + 1 = 5\sin(3x - \alpha) + 1 \text{ với } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow -4 \leq y \leq 6.$$

Câu 40. Chọn đáp án B

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có } (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 \leq (1^2 + (\sqrt{3})^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4$$

$$\text{Khi đó } -2 \leq \sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq \sin x + \sqrt{3}\cos x + 4 \leq 6 \Rightarrow y \in [2; 6] \Rightarrow \begin{cases} \min y = 2 \\ \max y = 6 \end{cases}$$

Câu 41. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}{2\sin 2x - \cos 2x + 4} \Leftrightarrow 2y \cdot \sin 2x - y \cdot \cos 2x + 4y = \sin 2x + 2\cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow (2y - 1) \cdot \sin 2x - (y + 2) \cdot \cos 2x = 3 - 4y \quad (*)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có } [(2y - 1) \cdot \sin 2x - (y + 2) \cdot \cos 2x]^2 \leq (2y - 1)^2 + (y + 2)^2$$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ ta được } (3 - 4y)^2 \leq (2y - 1)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow y \in \left[\frac{2}{11}; 2\right]$$

Câu 42. Chọn đáp án D

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có } (\sin x + 3\cos x)^2 \leq (1^2 + 3^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 10$$

$$-\sqrt{10} \leq \sin x + 3\cos x \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{10} \leq \sin x + 3\cos x - 2 \leq -2 + \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} \min y = -2 - \sqrt{10} \\ \max y = -2 + \sqrt{10} \end{cases}$$

Câu 43. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} \text{ và } 2\cos^2 2x = \cos 4x. \text{ Khi đó } y = \frac{1 + 6 \cdot \sin 4x - \cos 4x}{2 \cdot \cos 4x - 2 \cdot \sin 4x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 2y.\cos 4x - 2y.\sin 4x + 6y = 1 + 6.\sin 4x - \cos 4x \Leftrightarrow (2y+1).\cos 4x - (2y+6).\sin 4x = 1 - 6y \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $[(2y+1).\cos 4x - (2y+6).\sin 4x]^2 \leq (2y+1)^2 + (2y+6)^2$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ ta được } (1-6y)^2 \leq (2y+1)^2 + (2y+6)^2 \Leftrightarrow \frac{5-2\sqrt{22}}{7} \leq y \leq \frac{5+2\sqrt{22}}{7}$$

Câu 44. Chọn đáp án C

Đặt $t = 3.\sin x + 4.\cos x$, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $t^2 \leq 25 \Leftrightarrow t \in [-5;5]$.

$$\text{Khi đó } y = 3t^2 + 4t + 1 = 3\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \min y = -\frac{1}{3}$$

Mặt khác $y = (t-5)(3t+19) + 96$, với $t \in [-5;5] \Rightarrow (t-5)(3t+19) \leq 0 \Rightarrow \max y = 96$.

Câu 45. Chọn đáp án B

$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } y &= (3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x = (3\sin x - 4\cos x)^2 - 2(3\sin x - 4\cos x) \\ &= (3\sin x - 4\cos x - 1)^2 - 1 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow \min y = -1 \text{ vì } (3\sin x - 4\cos x - 1)^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Khi đó bất phương trình $y \geq 2m-1; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m-1 \leq \min y = -1 \Leftrightarrow m \leq 0$

Câu 46. Chọn đáp án D

$$\text{Đặt } y = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2(1 + \cos 2x) + 1} = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow y.\sin 2x + 2y.\cos 2x + 3y = 3.\sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow (y-3).\sin 2x + (2y-1).\cos 2x = -3y \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $[(y-3).\sin 2x + (2y-1).\cos 2x]^2 \leq (y-3)^2 + (2y-1)^2$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ ta được } 9y^2 \leq (y-3)^2 + (2y-1)^2 \Leftrightarrow y \leq \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} \Rightarrow \max y = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$$

$$\text{Để bất phương trình } y \leq m+1; x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m+1 \geq \max y = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt{65} - 9}{4}$$

Câu 47. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } (\sin 2x + 3.\cos 2x)^2 \leq (1^2 + 3^2)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 10 \Leftrightarrow \sin 2x + 3.\cos 2x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$$

$$\text{Và } (4.\sin 2x + \cos 2x)^2 \leq (4^2 + 1^2)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 17 \Rightarrow 4.\sin 2x + \cos 2x \in [-\sqrt{17}; \sqrt{17}]$$

Khi đó $4\sin 2x + \cos 2x + 17 > 0$ nên để bất phương trình đã cho có nghiệm thì

$$3\cos 2x + \sin 2x + m + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m - 1 < \min y = -\sqrt{10} \Leftrightarrow m > \sqrt{10} - 1$$

$$\text{Lại có } \frac{4\sin 2x + \cos 2x + 17}{3\cos 2x + \sin 2x + m + 1} \geq 2 \Leftrightarrow 4.\sin 2x + \cos 2x + 17 \geq 6.\cos 2x + 2.\sin 2x + 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow 2.\sin 2x - 5.\cos 2x \geq 2m - 15; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m - 15 \leq \min\{2.\sin 2x - 5.\cos 2x\} \Leftrightarrow 2m - 15 \leq -\sqrt{29}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{15 - \sqrt{29}}{2}. \text{ Vậy giá trị cần tìm của } m \text{ là } \sqrt{10} - 1 < m \leq \frac{15 - \sqrt{29}}{2}$$

Câu 48. Chọn đáp án B

$$\text{Ta có } \cos 2x + \cos 2y = 2[1 - \sin(x + y)] \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2y \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x + y).\cos(x - y) \geq 0$$

$$\text{Với } x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(x - y) > 0, \text{ do đó } \cos(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x + y \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x + y} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}; \forall x, y, a, b, \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Khi đó } p = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x} \geq \frac{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2}{x + y} \geq \frac{2}{\pi} \cdot (\sin^2 x + \cos^2 y)^2 \text{ vì } \frac{1}{x + y} \geq \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Lại có } (\sin^2 x + \cos^2 y)^2 = (1 - \cos^2 x + \cos^2 y)^2 = (1 + \cos^2 y - \cos^2 x)^2 \geq 1$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P \text{ là } \min P = \frac{2}{\pi}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 49. Chọn đáp án D

$$\text{Ta có } y = \frac{k \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y.\cos x + 2y = k.\sin x + 1 \Leftrightarrow y.\cos x - k.\sin x = 1 - 2y \quad (*)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có } (y.\cos x - k.\sin x)^2 \leq (y^2 + k^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = y^2 + k^2$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } (*), \text{ ta được } (1 - 2y)^2 \leq y^2 + k^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - k^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \leq k^2 + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{2}{3} \geq -\sqrt{\frac{3k^2 + 1}{9}} \Leftrightarrow y \geq \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{3k^2 + 1}{9}} \Rightarrow \min y = \frac{2 - \sqrt{3k^2 + 1}}{3}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \min y > -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3k^2 + 1}}{3} > -1 \Leftrightarrow \sqrt{3k^2 + 1} < 5 \Leftrightarrow |k| < 2\sqrt{2}$$

Câu 50. Chọn đáp án B

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \sin^4 x - \cos^4 x \neq 0 \Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 51. Chọn đáp án B

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 52. Chọn đáp án D

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } 1 + \cos 4x \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 53. Chọn đáp án D

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \tan x - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \geq \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \geq x \geq \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$\rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$