

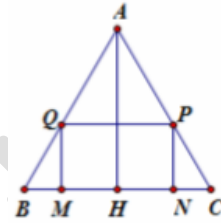
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C

Gọi O là tâm của đường tròn. Ta có : $OP^2 = ON^2 + PN^2 \geq 2N.PN = S_{MNPQ} \Leftrightarrow S_{MNPQ} \leq 9$.

Câu 2: Đáp án A

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật nên MN nhận trung điểm H của BC làm trung điểm của nó. Đặt $MH = x$,



$$\text{Vì } \frac{BM}{BH} = \frac{MQ}{AH} = \frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2}} = \frac{MQ}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow MQ = \frac{(a-2x)\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = MN.MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2x(a-2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{(2x+a-2x)^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Câu 3: Đáp án C

Đặt hệ trục tọa độ Oxy với $\overrightarrow{Ox} \uparrow \overrightarrow{OA}$, \overrightarrow{Oy} vuông góc d lên phía bầu trời.

Khi đó ta có tọa độ điểm $A(300;0)$ còn tọa độ của máy bay là $M(m,m^2)$ với $m \geq 0$

Khoảng cách từ A đến máy bay M là:

$$AM = \sqrt{(300-m)^2 + m^2} = \sqrt{2(m^2 - 150)^2 + 45000} \geq 30\sqrt{50} m.$$

Câu 4: Đáp án A

Dựa vào mặt cắt ở hình thứ 3, ta xác định máng xối có dạng hình trụ đáy hình thang cân bị khuyết 1 mặt bên. Trước hết nhận thấy chiều cao của hình trụ là không đổi, bằng $3m$. Thể tích hình trụ lớn nhất khi thể tích hình thang $ABCD$ lớn nhất.

Xét hình thang cân $ABCD$. Gọi h là chiều cao hình thang, khi đó $AD = 30 + 2\sqrt{30^2 - h^2}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)h}{2} = \left(30 + \sqrt{30^2 - h^2}\right)h = 30h + h\sqrt{30^2 - h^2} = f(h)$$

$$\Rightarrow f'(h) = 30 + \sqrt{30^2 - h^2} - \frac{2h^2}{\sqrt{30^2 - h^2}} = \frac{30\sqrt{30^2 - h^2} + 30^2 - 3h^2}{\sqrt{30^2 - h^2}}$$

$$\rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow 30\sqrt{30^2 - h^2} = 3h^2 - 30^2 \Leftrightarrow h = 10\sqrt{5}$$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số

$$f(h) \Rightarrow S_{ABCD} \leq f(10\sqrt{5}) = 500\sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow V \leq 150000\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 5: Đáp án B

Đặt $SA = x \Rightarrow SC = 12 - x \text{ km}$. Hình vẽ minh họa như hình bên.

Chi phí lắp điện trên bờ SA là $t_1 = 80.SA = 80x$.

Chi phí lắp điện dưới nước SB là

$$t_2 = 100.SB = 100\sqrt{(12-x)^2 + 9}.$$

Vậy tổng chi phí để lắp đặt điện là

$$T = t_1 + t_2 = 80x + 100\sqrt{x^2 - 24x + 153}.$$

Xét hàm số $f(x) = 80x + 100\sqrt{x^2 - 24x + 153}$, ta có

$$f'(x) = 80 + \frac{100(x-12)}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}} = 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

Dựa vào BBT, suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 8 \Rightarrow SA = 8 \text{ km}$.

Câu 6: Đáp án C

Giả sử người đi từ A đến bờ sông (vị trí N) về đến vị trí B .

Gọi M, P là hình chiếu của A, B lên bờ sông

$$\Rightarrow AM = 118, BP = 487.$$

Dễ thấy $AMPB$ là hình thang vuông $\Rightarrow MP = 492 \text{ m}$.

$$\text{Đặt } MN = x \Rightarrow AN = \sqrt{x^2 + 118^2} \Rightarrow PN = MP - MN = 492 - x.$$

$$\text{Tam giác } NPB \text{ vuông, có } BN = \sqrt{BP^2 + NP^2} = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

$$\text{Khi đó } P = AN + BN = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$$

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in (0; 492)$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$ (thỏa mãn điều kiện)

Dựa vào BBT, suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $\frac{58056}{605} \Rightarrow AN + BN = f(x) = 779,8 \text{ m}$.

Câu 7: Đáp án A

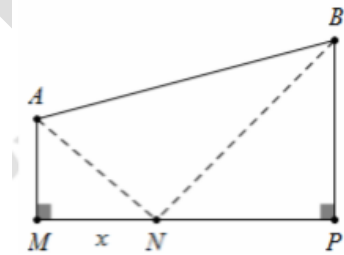
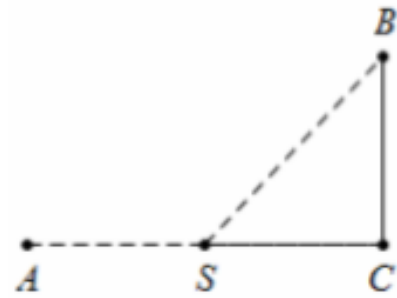
$$\text{Đặt } AM = x \Rightarrow CM = \sqrt{x^2 + 100} \Rightarrow BM = AB - AM = 24 - x.$$

$$\text{Tam giác } MBD \text{ vuông tại } B, \text{ có } MD = \sqrt{BM^2 + BD^2} = \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}.$$

Khi đó

$$P = CM + MD = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{(24 - x)^2 + 900} = f(x) \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 48x + 1476}$$

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in (0; 24)$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn điều kiện)



Dựa vào BBT, suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 6 \Rightarrow AM = 6 \text{ m} \Rightarrow BM = 18 \text{ m}$.

Câu 8: Đáp án D

Tam giác ACD vuông, có $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3,75$ và $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} AF = 0,75 \\ BF = 1 \end{cases}$

Đặt $EF = x \Rightarrow ED = FD - EF = FD - x = AD - AF - x = 3 - x \Rightarrow BE = \sqrt{x^2 + 1}$

Tam giác ECD vuông tại D , có $EC = \sqrt{ED^2 + CD^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 34}$.

Khi đó

$$P = AB + BE + ED = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 34} + 1,25 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 34}$$

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in (0; 3,75)$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$ (thỏa mãn điều kiện)

Dựa vào BBT, suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $f(0,5) = 3\sqrt{5}$.

Câu 9: Đáp án A

Theo bài ta, ta có $2x + 2y = 60 \Leftrightarrow x + y = 30 \Leftrightarrow y = 30 - x$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là

$$V = 20xy = 20x(30 - x) \leq 20 \cdot \frac{(x + 30 - x)^2}{4} = 5 \cdot 30^2 = 4500 \text{ cm}^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 30 - x \Leftrightarrow x = 15 \Rightarrow y = 15$.

Vậy diện tích toàn phần của khối hộp chữ nhật là $S_p = 2 \cdot 20x + 2 \cdot 20y + xy = 1425 \text{ cm}^3$.

Câu 10: Đáp án A

Gọi A' đối xứng với A qua PQ . Gọi M là vị trí xây trạm thu phí và trạm xăng trên PQ

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm $A'B$ và PQ .

$$\forall 1 \frac{MP}{MQ} = \frac{PA'}{QB} = \frac{PA}{QB} \Leftrightarrow \frac{MP}{PA} = \frac{MQ}{QB} = \frac{MP + MQ}{PA + QB} = \frac{6}{5} \Rightarrow MP = 72.$$

Câu 11: Đáp án A

Gọi a là chiều dài hàng rào song song bờ sông, b là chiều dài mặt hàng rào vuông góc bờ sông.

Chi phí xây dựng vật liệu được tính là: $60.000 \times a + 50.000 \times 3b = 15.000.000$ (đồng).

$$\Leftrightarrow 2a + 5b = 500 \geq 2\sqrt{10ab} \Leftrightarrow ab \leq 6250 \text{ (m}^2\text{)}. \text{ Diện tích đất rào là: } S = ab \leq 6250 \text{ (m}^2\text{)}$$

Câu 12: Đáp án D

Gọi kích thước hàng rào trồng rau hình chữ nhật $a \times b$ trong đó a là cạnh song song với bờ tường.

$$\text{Theo đề, ta có } a + 2b = 200 \text{ (m)} \Rightarrow 200 \leq 2\sqrt{2ab} \Leftrightarrow ab \leq 5000 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích tâm rào khi đó là: $S = ab \leq 5000 \text{ (m}^2\text{)}$.