

Theo đề: $abc = 3200 \text{ (cm}^3\text{)}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = 2a \Rightarrow a^2b = 1600$

Diện tích hồ ga là:

$$S = ab + 2ac + 2bc = 4a^2 + 5ab = 4a^2 + \frac{5ab}{2} + \frac{5ab}{2} \geq 3\sqrt{25a^4b^2} = 1200 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 6: Đáp án B

Thể tích của chiếc hộp đáy là hình vuông là $V = S.h = h.x^2 = 32 \Leftrightarrow h = \frac{32}{x^2}$.

Diện tích phần hộp cần mạ vàng là $S = S_d + S_{xq} = x^2 + 4.hx = x^2 + \frac{128}{x}$

$$= x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{64}{x} \cdot \frac{64}{x}} = 3\sqrt{64 \cdot 64} = 48.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{64}{x} \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow h = 2$.

Câu 7: Đáp án B

Gọi h, x lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của hình trụ.

Dải băng ruy cần bọc quanh hình trụ có độ dài là $L = 130 - 10 = 120 \text{ cm}$.

Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật thiết diện qua trục của hình trụ với A, B thuộc đáy, C, D là đường sinh.

Khi đó $\Rightarrow L = 2.(2.AB + 2.CD) = 2.(4x + 2h) = 120 \Leftrightarrow h + 2x = 30 \Leftrightarrow h = 30 - 2x \text{ (cm)}$.

Thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h = \pi x^2 h = \pi x^2 (30 - 2x)$

$$= \pi.x.x.(30 - 2x) \leq \pi \cdot \frac{(x + x + 30 - 2x)^3}{27} = 1000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Dấu = xảy ra khi $x = 30 - 2x \Leftrightarrow x = 10 \text{ cm}$. Vậy thể tích lớn nhất của hộp là $1000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 8: Đáp án C

Hình hộp chữ nhật được uốn thành có kích thước:

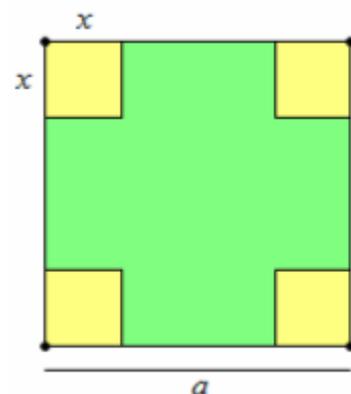
Chiều cao bằng $h = x \text{ (cm)}$.

Đáy là hình vuông cạnh bằng $a - 2x \text{ (cm)}$.

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật không có nắp là

$$V = S.h = (a - 2x)^2 .x = \frac{1}{4} .(a - 2x) .(a - 2x) .4x$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta có



$$(a-2x).(a-2x).4x \leq \frac{(a-2x+a-2x+4x)^3}{27} = \frac{8a^3}{27} \Rightarrow V \leq \frac{2a^3}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a-2x=4x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.

Câu 9: Đáp án D

Đặt $BM = x \Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{x^2 + 25}$ (km) và $MC = 7 - x$ (km)

Tổng thời gian đi từ $A \rightarrow C$ là $t_{A \rightarrow C} = t_{A \rightarrow M} + t_{M \rightarrow C} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ (h).

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ với $x \in (0;7)$, ta có

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6} = \frac{3x - 2\sqrt{x^2 + 25}}{12}$$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 2\sqrt{x^2 + 25} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$ suy ra $\max_{(0;7)} f(x) = f(2\sqrt{5})$.

Vậy độ dài đoạn $BM = 2\sqrt{5}$ thì người đó đến kho nhanh nhất

Câu 10: Đáp án C

Gọi M là điểm trên bờ sông mà người đó đến lấy nước. A' là điểm đối xứng với A qua bờ sông

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

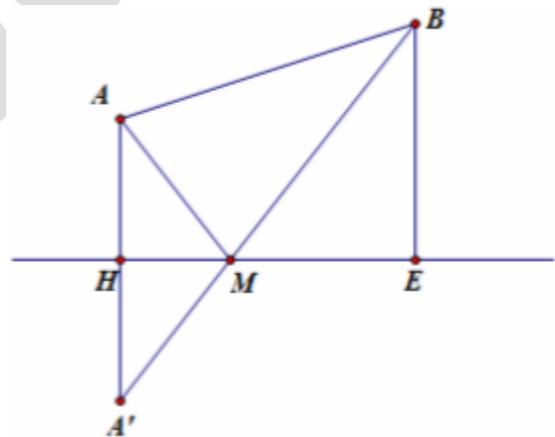
$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$$

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và bờ sông.

Gọi H, E lần lượt là hình chiếu của A, B lên bờ sông. Khi đó:

$$HE = \sqrt{AB^2 - (AH - BE)^2} = 492$$

$$\forall \frac{HM}{EM} = \frac{HA'}{BE} = \frac{HA}{BE} = \frac{118}{497} \Rightarrow HM = 94,4 \Rightarrow AM + BM = 779,8$$



Câu 11: Đáp án C

Gọi a, b lần lượt là độ dài đoạn dây làm thành hình vuông và hình tròn.

Theo đề ta có: $a + b = 28$. Khi đó hình vuông có cạnh $\frac{a}{4}$ và hình tròn có bán kính $\frac{b}{2\pi}$

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn được tính là

$$S = \frac{a^2}{16} + \pi \times \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4\pi} \geq \frac{(a+b)^2}{16+4\pi} = \frac{28^2}{16+4\pi}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{a}{16} = \frac{b}{4\pi} \\ a+b=28 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{112}{\pi+4}$$

Câu 12: Đáp án B

Gọi a, b lần lượt là độ dài đoạn dây làm thành hình tam giác đều và hình vuông.

Theo đề ta có: $a+b=100$. Khi đó hình tam giác đều là $\frac{a}{3}$ và hình vuông có bán kính $\frac{b}{4}$

Tổng diện tích hình tam giác đều và hình vuông được tính là

$$S = \frac{a^2}{12\sqrt{3}} + \frac{b^2}{16} \geq \frac{(a+b)^2}{12\sqrt{3}+16} = \frac{100^2}{12\sqrt{3}+16}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{a}{12\sqrt{3}} = \frac{b}{16} \\ a+b=100 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{a}{3} \approx 18,83$$

Câu 13: Đáp án C

Xét hàm $f(h) = \frac{h^4}{4} - 2h^2 + 7$ với $0 < h < 4 \Rightarrow f'(h) = h^3 - 4h \rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f(h)$, ta có $f(h) \leq f(4) = 39$.