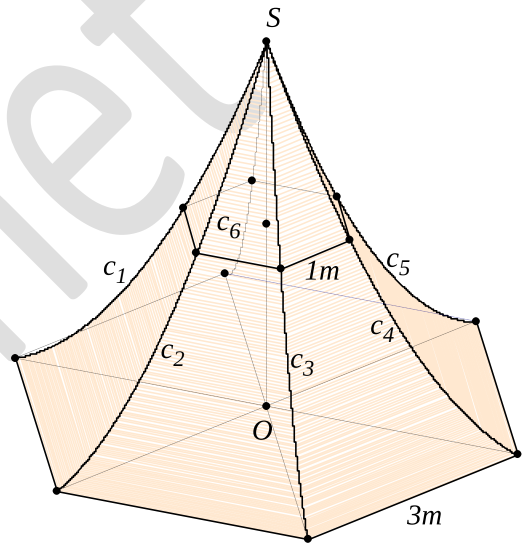
$$\int_0^b \left(x^4-3x^2+m\right)\mathrm{d}x=0 \Rightarrow \frac{b^5}{5}-b^3+mb=0 \Rightarrow \frac{b^4}{5}-b^2+m=0 \text{ (2) } \left(\text{do } b>0\right)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4-2b^2=0 \Rightarrow b^2=\frac{5}{2}$ (do $b>0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m=\frac{5}{4}$.

Câu 13: Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



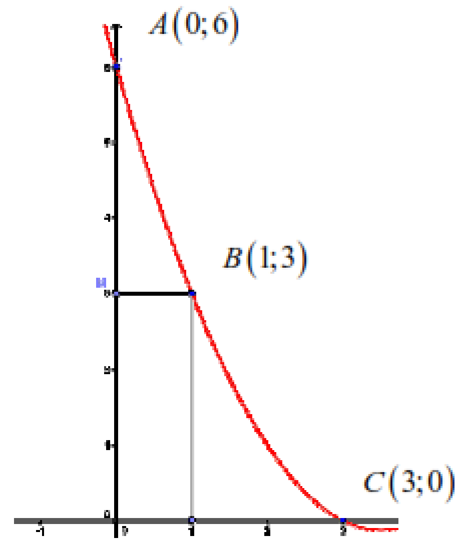
A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}\ (m^3)$ **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}\ (m^3)$

C. $\frac{135\sqrt{3}}{4}\ (m^3)$ **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}\ (m^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+6$



Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

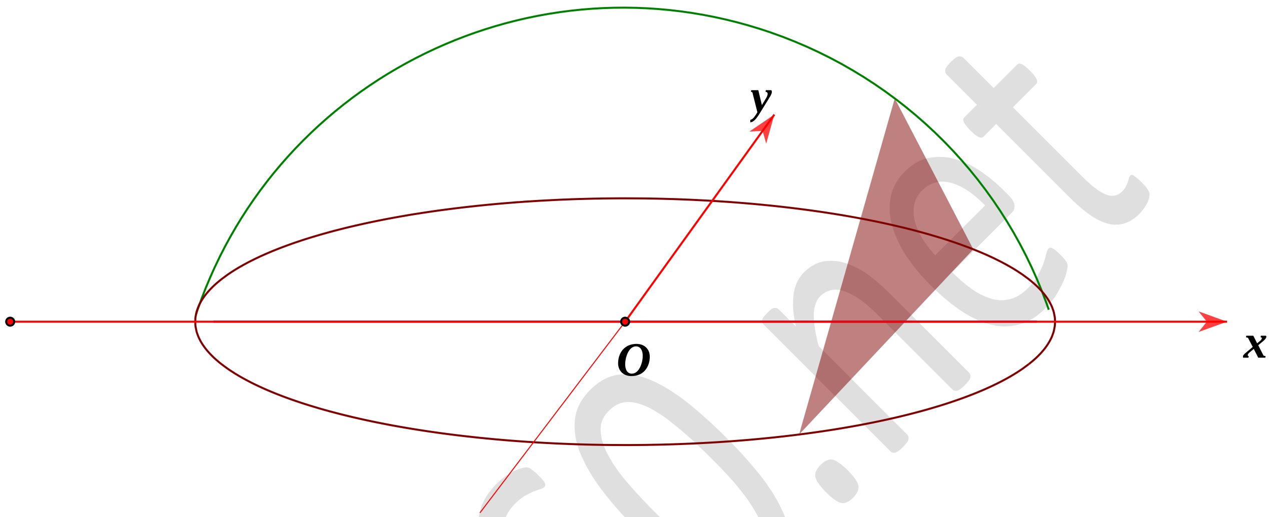
Nếu ta đặt $t=OM$ thì $BM=\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}$

Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$$S(t)=6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2,\ \text{với } t\in[0;6]$$

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là: $V=\int_0^6 S(t)dt=\int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 dt=\frac{135\sqrt{3}}{8}$.

Câu 14: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{256}{3}$. **D.** $V=\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

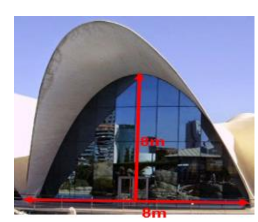
Giải phương trình $x^2+y^2=16 \Leftrightarrow y^2=16-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

Diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{16-x^2}\right|^2.\sin\frac{\pi}{3}=\left(16-x^2\right)\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\int_{-4}^{4} S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **B**.

Câu 15: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*



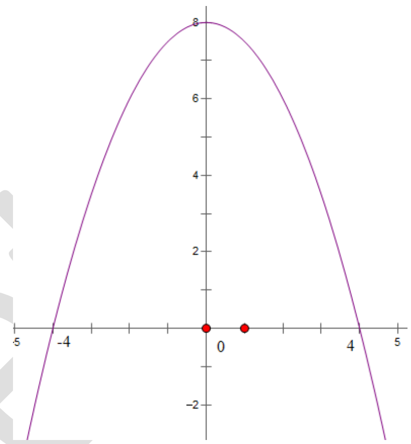
A. $\frac{28}{3}(m^2)$ **B.** $\frac{26}{3}(m^2)$ **C.** $\frac{128}{3}(m^2)$ **D.** $\frac{131}{3}(m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A(4;0), B(0;8)$

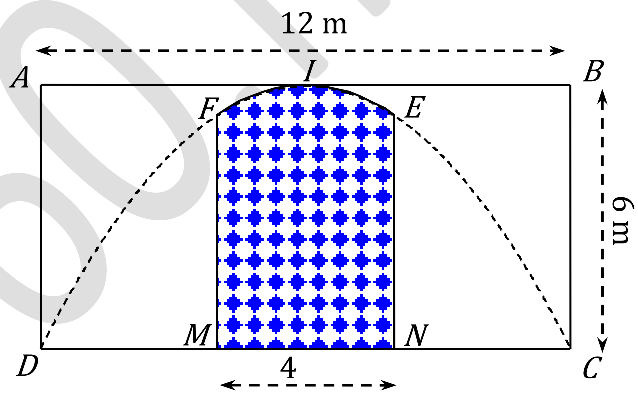


Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a.16 + c \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

$$S = \int_{-4}^{4} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| = \frac{128}{3}\left(m^2\right)$$

Câu 16: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6\ m$, chiều dài $CD = 12\ m$ (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\ m$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó ?



A. 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng.

C. 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

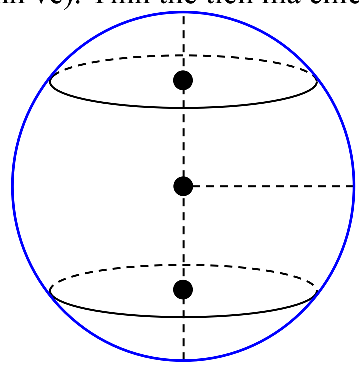
Hướng dẫn giải

- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đường thẳng MN thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right)dx = \frac{208}{9}\ m^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng

Câu 17: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $\mathrm{V}_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Cách 2: Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1=\pi\int_d^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\int_3^5\left(25-x^2\right)dx=\frac{52\pi}{3}$$

Vậy thể tích của chiếc lu là $V=V_c-2V_1=\frac{4}{3}\pi.5^3-2\frac{52}{3}\pi=132\pi$

Câu 18: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền