

BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍCH PHẦN

Câu 1: (CHUYÊN KHTN L4) Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) .

A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.

B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.

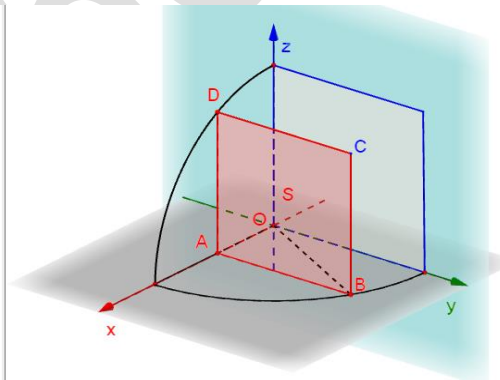
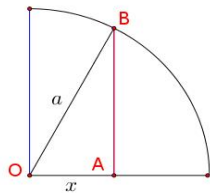
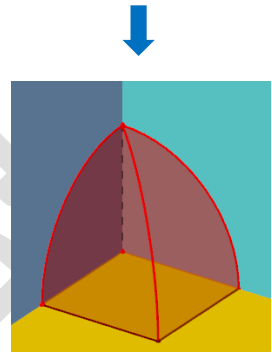
D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải

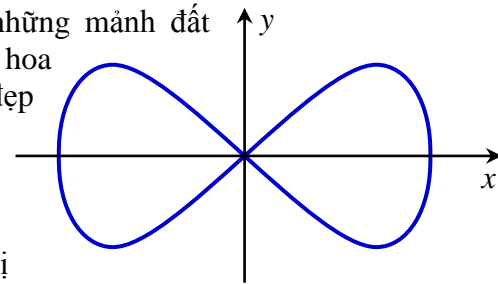
Chọn đáp án A.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}$.



Câu 2: (CHUYÊN VINH – L2) Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.



A. $S = \frac{125}{6} (m^2)$

B. $S = \frac{125}{4} (m^2)$

C. $S = \frac{250}{3} (m^2)$

D. $S = \frac{125}{3} (m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x \in [0;5]$

Nên $S_{(1)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25-x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^3)$

Câu 3: (CHUYÊN VINH – L2) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên).

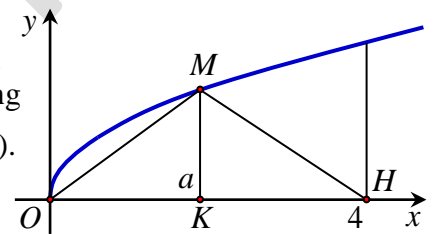
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó

A. $a = 2$.

B. $a = 2\sqrt{2}$.

C. $a = \frac{5}{2}$.

D. $a = 3$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $h_1 = OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H , chiều cao $h_2 = HK = 4 - a$, bán kính đáy

$R = MK = \sqrt{a}$

Khi đó $V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = \frac{4}{3} \pi a$

Theo đề bài $V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi a \Rightarrow a = 3$.

Câu 4: (CHU VĂN AN – HN) Cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

- A. $V = \pi R^3$. B. $V = \frac{\pi R^3}{2}$. C. $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. D. $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

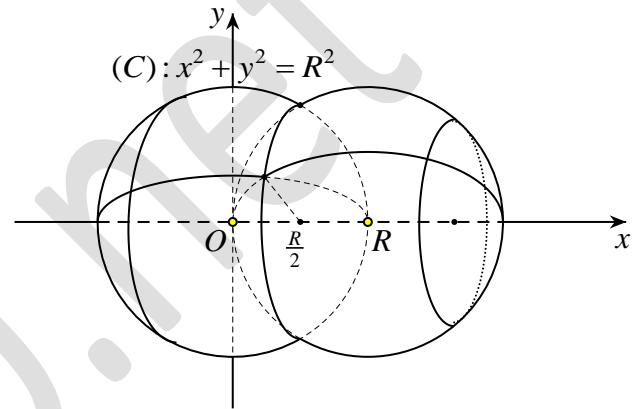
Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O, R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}$$



Câu 5: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu

(đơn vị lít) là bao nhiêu ?



- A. 425,2 lit. B. 425162 lit. C. 212581 lit. D. 212,6 lit.