Đáp án

1-C	2-D	3-C	4-A	5-D	6-B	7-B	8-B	9-B	10-D
11-C	12-C	13-C	14-B	15-A	16-B	17-B	18-D	19-D	20-C
21-D	22-C	23-B	24-A	25-B	26-C	27-B	28-C	29-C	30-C
31-A	32-C	33-A	34-C	35-D	36-B	37-A	38-C	39-D	40-C
41-C	42-A	43-A	44-C	45-A	46-D	47-D	48-D	49-C	50-B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C

giả sử $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$

The giả thiết, ta có $\left(1+i\right)\left(x-yi\right)-1-3i=0 \Leftrightarrow \left(x+y-1\right)+\left(x-y-3\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Suy ra $z = 2 - i \Rightarrow \overline{z} = 2 + i$

Ta có $w = 1 - \left(2-i\right)i + 2 + i = 3 + i^2 - 2i + i = 2 - i$. Vậy chọn phần ảo là – 1

Câu 2: Đáp án D

1) $\vec{u} = \left(3;2-1\right);\ \vec{v} = \left(-1;-3;1\right) \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\right) = \left(-1;-2;-7\right)$

2) $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(-4;-6;-3\right)$

3) Ta có $\vec{u} = \left(4;1;-3\right);\ \vec{v} = \left(0;1;5\right);\ \vec{w} = \left(2;-3;1\right) \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(8;-20;4\right) \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 80$

4) Ta có $\vec{u} = \left(1;1;0\right);\ \vec{v} = \left(1;1;1\right);\ \vec{w} = \left(1;0;0\right) \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(1;-1;0\right) \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 1$

Câu 3: Đáp án C

Đặt $t = 3^{x^2}$, $t \ge 1 \Rightarrow pt \Leftrightarrow t^2 - 6t + 3m - 1 = 0\left(*\right)$. Đặt $f\left(t\right) = t^2 - 6t + 3m - 1$

Giả sử phương trình $f\left(t\right)$ có 2 nghiệm là a và b thì $\left[\begin{array}{l} 3^{x^2} = a \\ 3^{x^2} = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \log_3 a \\ x^2 = \log_3 b \end{array}\right.$

Vậy ta có nhận xét rằng để (*) có 3 nghiệm thì $\begin{cases} \log_3 a = 0 \\ \log_3 b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 1 \end{cases}$

Khi đó $f\left(1\right) = 1 - 6 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Với $m=2\Rightarrow f(t)=t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=5>0\end{array}\right.(tm)$

Câu 4: Đáp án A

Gọi t là thời gian bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, khi đó $10^t=\frac{10^{12}}{5}\Leftrightarrow t=\log\frac{10^{12}}{5}=12-\log 5$

Câu 5: Đáp án D

Điều kiện: $x\neq 0$. Ta có $\frac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\le 2\Leftrightarrow\frac{2.9^x-5.6^x+2.4^x}{6^x-4^x}\le 0$

Chia cả tử và mẫu của vế trái cho $4^x>0$, bất phương trình tương đương với

$\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 0$. Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t>0$ bất phương trình trở thành

$$\frac{2t^2-5t+2}{t-1}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{2}\\1<t\le 2\end{array}\right.$$

Với $t\le\frac{1}{2}$ ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\le\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\le-\log_{\frac{3}{2}}2$

Với $1<t\le 2$ ta có $1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 2\Leftrightarrow 0<x\le\log_{\frac{3}{2}}2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\log_{\frac{3}{2}}2\right]\cup\left(0;\log_{\frac{3}{2}}2\right]$

Câu 6: Đáp án B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có các nhận xét sau:

+ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(-1;1)$

+ Ta thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$ và $\lim\limits_{x\to-1}y=\pm\infty$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận

+ Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<m<2$

+ Hàm số không có GTLN trên tập xác định

Câu 7: Đáp án B

Ta có $b=\log_{25}2=\log_{5^2}2\Rightarrow 2b=\log_5 2\Leftrightarrow 4b=\log_5 4\Rightarrow\log_4 5=\frac{1}{4b}$

Khi đó

$$\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1}{2}.\log_{60}\sqrt{150}=\frac{1}{2}.\frac{\log_4\left(2.3.5^2\right)}{\log_4\left(4.3.4\right)}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}\log_4 3+2.\log_4 5}{1+\log_4 3+\log_4 5}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2b}}{1+a+\frac{1}{4b}}=\frac{1+b+2ab}{1+4b+4ab}$$

Câu 8: Đáp án B

$$\frac{2+2\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)}{2-2\left(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\right)}=\frac{2+2\cos\left(\alpha-\beta\right)}{2-2\sin\left(\alpha-\beta\right)}=\frac{2+2\cos\frac{\pi}{6}}{2-2\sin\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$$

Câu 9: Đáp án B

$\cos x+\sin 4x-\cos 3x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x.\sin x+2\sin 2x.\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(\sin x+\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow \sin 2x\left(-2\sin^2 x+\sin x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin x=1\\ \sin x=\frac{-1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Nghiệm thứ nhất có 4 họ nghiệm , nhưng có 1 nghiệm trùng với nghiệm thứ 2, như vậy có tất cả 6 họ nghiệm thỏa mãn đề bài

Câu 10: Đáp án D

Dựa vào giả thiết, ta có

+ Bất phương trình $\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^x+2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{1}{5}\right)^x-5>0$

Đặt $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{1}{5}\right)^x-5$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}+2\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+3\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5}-5<0\Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến trên tập xác định.

Mặt khác $f\left(1\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x<1\Rightarrow S_1=\left(-\infty;1\right)$

+ Bất phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\ x+2\le\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x\le-\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow S_2=\left(-2;-\frac{7}{4}\right]$

+ Bất phương trình $\Leftrightarrow x<0 \Rightarrow S_3=(-\infty;0)$

Suy ra $S_2 \subset S_3 \subset S_1$

Câu 11: Đáp án C

- TXĐ: $2\cos x-\sin x+4\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

- Khi đó: $y(2\cos x-\sin x+4)=2\sin x+\cos x+3 \Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=3-4y \ (*)$

- Để (*) có nghiệm thì: $(3-4y)^2\le(2y-1)^2+\left[-(y+2)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{2}{11}\le y\le 2$

Từ đây suy ra $\begin{cases}\max y=2\\ \min y=\frac{2}{11}\end{cases}$

Câu 12: Đáp án C

Ta có $z_2-iz_1=2+3i-i+i^2=1+2i \Rightarrow |z_2-iz_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Câu 13: Đáp án C

Điều kiện: $\cos x\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ \frac{\pi}{2}+k2\pi\right]$

Tập giá trị: ta có $0\le\cos x\le 1 \Leftrightarrow 0\le y\le 1$

Câu 14: Đáp án B

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ dv=xdx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=\frac{2}{2x+1}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases} \Rightarrow I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4-\int_0^4\frac{x^2}{2x+1}dx$

$\Leftrightarrow I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4-\int_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x+1)}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln(2x+1)\right)\Bigg|_0^4$

$\Leftrightarrow I=\frac{63}{4}\ln 3-3 \Rightarrow \begin{cases}a=63\\ b=4\\ c=3\end{cases} \Rightarrow S=a+b+c=70$

Cách : PP hằng số

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ dv=xdx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=\frac{2}{2x+1}dx\\ v=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{8}\end{cases} \Rightarrow I=\left[\frac{4x^2-1}{8}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4-\int_0^4\frac{2x-1}{4}dx$

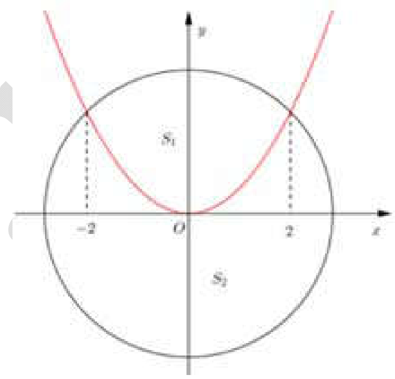
$$\Rightarrow I = \frac{63}{8}\ln 9 = \frac{\left(x^2-4\right)}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{63}{4}\ln 3 - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 63 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 70$$

Câu 15: Đáp án A

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0,\ x>0 \\ \log_2\left(x+3\right) - \log_2 x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 \dfrac{x+3}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x+3}{x^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

Câu 16: Đáp án B



Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Ta có parabol và đường tròn như hình vẽ bên

Khi đó $S_1 = \int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2} - \dfrac{x^2}{2}\right)dx = 2\pi + \dfrac{4}{3}$ (bấm máy tính)

Suy ra $S_2 = 8\pi - S_1 = 6\pi - \dfrac{4}{3}$. Suy ra $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi + \dfrac{4}{3}}{6\pi = \dfrac{4}{3}} = \dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$

Câu 17: Đáp án B

Ta có: chọn ra 4 thầy cô từ 16 thầy cô có $C_{16}^4 = 1820$ (cách chọn)

+ Để chọn được 4 giáo viên phải có cô giáo và đủ ba bộ môn, vậy có các trường hợp sau:

* Trường hợp 1: chọn 2 thầy toán, 1 cô lý, 1 cô hóa có $C_8^2 C_5^1 C_3^1$ (cách chọn)

* Trường hợp 2: chọn 1 thầy toán, 2 cô lý, 1 cô hóa có $C_8^1 C_2^5 C_3^1$ (cách chọn)

* Trường hợp 3: chọn 1 thầy toán, 1 cô lý, 2 cô hóa có $C_8^1 C_5^1 C_3^2$ (cách chọn)

Vậy xác suất để chọn được 4 người phải có cô giáo và có đủ ba bộ môn là

$$P = \frac{C_8^2 C_5^1 C_3^1 + C_8^1 C_2^5 C_3^1 + C_8^1 C_5^1 C_3^2}{C_{16}^4} = \frac{3}{7}$$

Câu 18: Đáp án D

A, B, C là hình chiếu của M trên trục Ox, Oy, Oz $\Rightarrow A\left(-3;0;0\right)$, $B\left(0;2;0\right)$, $C\left(0;0;4\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(3;2;0\right)$ và $\overrightarrow{AC} = \left(3;0;4\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = \left(8;-12;-6\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}} = \left(4;-6;-3\right)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $4x-6y-3z+12=0$

Hoặc phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn, ta được (ABC): $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

Vậy mặt phẳng có phương trình $4x-6y-3z+12=0$ song song với mặt phẳng (ABC)

Câu 19: Đáp án D

Điều kiện: $n\geq 3$

$$\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^{4}}\leq\frac{1}{14P_3}\Leftrightarrow\frac{(n-1)!(n-3)!}{(n-3)!2!(n+1)!}\leq\frac{1}{14.3}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)n}\leq\frac{1}{42}\Leftrightarrow(n+1)n\geq 42\Leftrightarrow n\geq 6$$

Câu 20: Đáp án C

Ba hệ số đầu tiên của khai triển là $C_n^0=1;\ C_n^1.\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ và $C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n(n-1)}{8}$ lập thành cấp số cộng nên: $1+\frac{n(n-1)}{8}=2.\frac{n}{2}\Leftrightarrow n^2-9n+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=8\\n=1(L)\end{array}\right.$

(n = 1 thì khai triển chỉ có 2 số hạng)

Các số hạng của khai triển đều có dạng: $\frac{C_8^k}{2^k}.\frac{x^{\frac{8-k}{2}}}{x^{\frac{k}{4}}}$

Số hạng nhận giá trị hữu tỷ $\forall x\in N^*$ ứng với $\begin{cases}(8-k)\ \vdots\ 2\\k\ \vdots\ 4\end{cases}\Rightarrow k\in\{0;4;8\}$

Vậy khai triển có 3 số hạng luôn nhận giá trị hữu tỷ $\forall x\in N^*$ là 1; $\frac{C_8^4}{2^4}x$ và $\frac{1}{2^8x^2}$

Câu 21: Đáp án D

Ta có $y'=(x+\sin 2x)'=1+2\cos 2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1+2\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z}),\ x\in(0;\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}\\x=\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

Mặt khác $y''=-4\sin 2x\Rightarrow\begin{cases}y''_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-2\sqrt{3}<0(CĐ)\\y''_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{3}>0(CT)\end{cases}$

$\Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số bằng $y_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 22: Đáp án C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow D = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Câu 23: Đáp án B

Xét $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25 \Rightarrow I(-1;2;3)$ và bán kính R = 5

Để (S) và (α) không có điểm chung khi

$$d(I;(P)) > R \Leftrightarrow \frac{|-1.2+2-2.3+m|}{\sqrt{2^2+1^1+(-2)^2}} > 5 \Leftrightarrow |m-6| > 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 21 \\ m < -9 \end{array}\right.$$

Câu 24: Đáp án A

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x+\sqrt{4x-3}\right)(x-3)x}{\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)} = \dfrac{9}{8}$

Suy ra $a=9;\ b=8 \Rightarrow a-b=1$

Câu 25: Đáp án B

Ta có $\int f(x)dx = \int \cos^3 xdx = \dfrac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)dx = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right)+C$

Câu 26: Đáp án C

Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{SAB}=45^0 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại S

Suy ra $SA \perp SB$ mà $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SAC \Rightarrow$ SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau

Khi đó $\dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}+\dfrac{1}{SC^2}$ mà $SA = SB = SC = x \Rightarrow x = a\sqrt{3}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là $R = \dfrac{\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$

Câu 27: Đáp án B

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC

Khi quay hình chữ nhật xung quanh trục MN ta được hình trụ

+ Bán kính đường tròn đáy là $r = AM\dfrac{AD}{2} = 1$

+ Chiều cao của hình trụ là $h = AB = 1$

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi r(r+h) = 4\pi$

Câu 28: Đáp án C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{|x|-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}=-2 \\ \lim\limits_{x\to\infty}=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai TCĐ. Vậy đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận

Câu 29: Đáp án C

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\int(t^2+4t)dt=\dfrac{t^3}{3}+2t+C(m/s)$

Do khi bắt đầu tăng tốc $v_0=15$ nên $v_{(t-0)}=15 \Rightarrow C=15 \Rightarrow v(t)=\dfrac{t^3}{3}+2t^2+15$

Khi đó quãng đường đi được $S=\int\limits_0^3 v(t)dt=\int\limits_0^3\left(15+\dfrac{t^3}{3}+2t^2\right)dt=\left.\left(15+\dfrac{t^4}{12}+\dfrac{2}{3}t^3\right)\right|_0^3=69,75\,m$

Câu 30: Đáp án C

Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=a-bi$ mà $(2-i)\bar{z}-3z=-1+3i$

Suy ra $(2-i)(a-bi)-3(a+bi)=-1+3i \Leftrightarrow 2a-2bi-ai-b-3a-3bi+1-3i=0$

$\Leftrightarrow 1-a-b-(a+5b+3)i=0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a-b=0 \\ a+5b+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=3$

Câu 31: Đáp án A

Giả sử $x=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có $M(a;b)$ và $M'(a;-b)$

* Khi đó $z(4+3i)=(4a-3b)+(3aq+4b)i$

Suy ra $N(4a-3b;3a+4b)$ và $N'(4a-3b;-3a-3b)$

* Do 4 điểm M, N, M', N' tạo thành hình thang cân nhận Ox làm trục đối xứng nên 4 điểm

đó lập thành hình chữ nhật $\Leftrightarrow MM'=NN' \Leftrightarrow 4b^2=4(3a+4b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=-\dfrac{8}{3}b \end{array}\right.$

* Với $a=-b$, ta có $|z+4i-5|=\sqrt{(b+5)^2+(b+4)^2}=\sqrt{2\left(b+\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=\dfrac{9}{2}, b=-\dfrac{9}{2}$

* Với $a=-\frac{8}{3}$, ta có $\left|z+4i-5\right|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}b+5\right)^2+\left(b+4\right)^2}=\sqrt{\frac{73}{9}b^2+\frac{104}{3}b+41}\ge\frac{289}{73}>\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $\min\left|z+4i-5\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 32: Đáp án C

Từ A kẻ AH vuông góc với BC $\left(H\in BC\right)$

Ta có $AA'\perp\left(ABC\right)\Rightarrow AA'\perp BC\Rightarrow BC\perp\left(AA'H\right)$

Khi đó $\widehat{\left(A'BC\right);\left(A'B'C'\right)}=\widehat{\left(A'BC\right);\left(ABC\right)}=\widehat{\left(A'H,AH\right)}=\widehat{A'HA}$

Suy ra $\tan\widehat{A'HA}=\frac{AA'}{AH}=AA'=\tan 60^0.AH$ mà $AH=\frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow AA'=\frac{6\sqrt{39}}{13}\Leftarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=\frac{6\sqrt{39}}{13}.\frac{1}{2}.2.3=\frac{18\sqrt{39}}{13}$

Câu 33: Đáp án A

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x^2-3x-1$ trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ta có $f'\left(x\right)=4x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

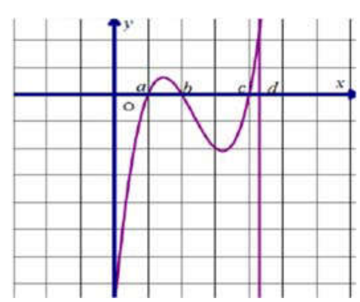
Lại có $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2;\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{17}{8};\ f\left(1\right)=-2\Rightarrow f\left(x\right)\in\left[\frac{-17}{8};-2\right]\Rightarrow\left|f\left(x\right)\right|\in\left[2;\frac{17}{8}\right]$

Do đó $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}y=\frac{17}{8}$

Câu 34: Đáp án C

- Dựa vào đồ thị hàm số $\Rightarrow$ bảng biến thiên $\Rightarrow\begin{cases}M=\left\{f\left(0\right),f\left(b\right),f\left(d\right)\right\}\\ m=\left\{f\left(a\right),f\left(c\right)\right\}\end{cases}$

- Mặt khác, dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng



+ $\int\limits_a^b f'\left(x\right)dx<\int\limits_b^c\left[-f'\left(x\right)\right]dx\Rightarrow f\left(x\right)\Big|_a^b<-f\left(x\right)\Big|_c^d\Leftrightarrow f\left(a\right)>f\left(c\right)$

+ $\int\limits_0^a\left[-f'\left(x\right)\right]dx>\int\limits_a^b f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(a\right)>f\left(b\right)-f\left(a\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)>f\left(b\right)$

+ $\int\limits_c^b\left[-f'\left(x\right)\right]dx>\int\limits_c^d f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow f\left(b\right)-f\left(c\right)>f\left(d\right)-f\left(c\right)\Leftrightarrow f\left(b\right)>f\left(d\right)$

Vậy $\begin{cases} f(a) > f(c) \Rightarrow m = f(c) \\ f(0) > f(b) > f(a) \Rightarrow M = f(0) \end{cases} \Rightarrow M + m = f(0) + f(c)$

Câu 35: Đáp án D

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} = \frac{(b+c)(b+a)}{2b+a+c} \Leftrightarrow (a+c)^2 + 2b(c+a) = 2\left(b^2 + ab + ac + ab\right)$$

$$a^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2ba = 2\left(b^2 + ab + ac + ab\right) \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$$

Câu 36: Đáp án B

Ta có $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \Rightarrow f'(x) = -\sin 4x$$

Ta có $g(x) = \sin^6 x + \cos^2 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2}\sin 4x$$

Do đó $3f'(x) - 2g'(x) + 2 = 3.(-\sin 4x) - 2\left(-\frac{3}{2}\sin 4x\right) + 2 = 2$

Câu 37: Đáp án A

Xét mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow I(2;-1;3)$ và $R = 3$

Mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ có phương trình lần lượt là $z = 0;\ x = 0;\ y = 0$

Có $d(I;(Oxy)) = 3;\ d(I;(Oyz)) = 2;\ d(I;(Oxz)) = 1$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy)

Câu 38: Đáp án C

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mà $M \in (P) \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1)

Ta có $\overrightarrow{AM} = (3-a;2;1), \overrightarrow{BM} = (3;2-b;1)$ và $\overrightarrow{BC} = (0;-b;c), \overrightarrow{AC} = (-a;0;c)$

Mặt khác M là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2b = 0 \\ c - 3a = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{14}{3};\ b = 7;\ c = 14 \Rightarrow (P): 3x + 2y + z - 14 = 0$

Cách 2: Chứng minh được $OM \perp (ABC)$

Ta có $\begin{cases} OA \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp OM$, tương tự $AB \perp OM \Rightarrow OM \perp (ABC)$

Khi đó $(P): 3x + 2y + z - 14 = 0$

Câu 39: Đáp án D

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$, ta có $y' = \dfrac{(2x-4)(x+m) - x^2 + 4x}{(x+m)^2} = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}; \forall x \neq -m$

Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' \geq 0,\ \forall x \in [1;+\infty)\ (*) \\ x = -m \notin \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m > -1 \end{cases}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 4m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2m(2-x)$ (I)

- TH1: Với $x = 2 \Rightarrow x^2 \geq 0,\ \forall x \in [1;+\infty)$ với mọi giá trị của m

- TH2: Với $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow x \in [1;2)$. Khi đó

$(I) \Leftrightarrow 2m \leq \dfrac{x^2}{2-x};\ \forall x \in [1;2) \Rightarrow 2m \leq \min\limits_{[1;2)} f(x)$

- TH3: Với $2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow x \in (2;+\infty)$. Khi đó

$(I) \Leftrightarrow 2m \geq \dfrac{x^2}{2-x};\ \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow 2m \geq \max\limits_{(2;+\infty)} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$, ta có $f'(x) = -\dfrac{x(x-4)}{(2-x^2)}, \forall x \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;2)} f(x) = f(1) = 1 \\ \max\limits_{(2;+\infty)} f(x) = f(4) = -8 \end{cases}$

Kết hợp các trường hợp, vậy $-1 < m \leq \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 40: Đáp án C

Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện MNPQ chính là trung điểm của OQ $\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. (Do dễ thấy MOQ, NOQ, POQ đều nhìn PQ dưới 1 góc vuông).

Cách 2: Dễ thấy MNPQ là tứ diện đều cạnh $a\sqrt{2}$. Khi đó tâm mặt cầu tứ diện cũng là trọng tâm tứ diện. Khi đó $G\left(\dfrac{x_M + x_N + x_P + x_Q}{4};...\right) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Cách 3. Viết $(ABC): x + y + z - 1 = 0$ suy ra tâm $I \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ cho $IM = IQ \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 41: Đáp án C

Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m = ah4x + bx^2 + c \Rightarrow a = 1;\ b = -2m;\ c = m$

Ta có $y' = 4x^2 - 4mx,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$. Để hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$

Sử dụng công thức giải nhanh $R_{\Delta ABC} = R_0$ với $R_0 = \dfrac{b^3 - 8a}{8|a|b} \Rightarrow 1 = \dfrac{-8m^3 - 8}{-16m} \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0$

Kết hợp với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = -1;\ m = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm

Cách 2. Ta có

$A(0;m);\ B\left(-\sqrt{m}; m - m^2\right);\ C\left(\sqrt{m}; m - m^2\right) \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{\left(m^4 + m\right)2\sqrt{m}}{4.m\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 + 1 = 2m$

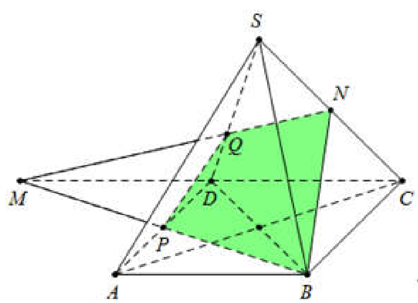
Câu 42: Đáp án A

Gọi V là thể tích khối chóp S.ABCD

V_1 là thể tích khối chóp PDQ.BCN và V_2 là thể tích của khối chóp còn lại, khi đó $V_1 + V_2 = V$

MB cắt AD tại P $\rightarrow$ P là trung điểm của AD

MN cắt SD tại Q $\rightarrow$ Q là trọng tâm của ΔSMC



Ta có $\dfrac{V_{M.PDQ}}{V_{M.BCN}} = \dfrac{MP}{MB}.\dfrac{MD}{MC}.\dfrac{MQ}{MN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$

Mặt khác $V_{M.BCN} = V_{M.PDQ} + V_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{5}{6}V_{M.BCN}$

Mà $S_{\Delta MBC} = S_{ABCD}, d\left(S;(ABCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(S;(ABCD)\right)$

Suy ra $V_{M.BCN} = V_{N.MBC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{2} \Rightarrow V_1 = \dfrac{5}{12}V \Rightarrow V_2 = \dfrac{7}{12}V \Rightarrow V_1 : V_1 = 7:5$

Câu 43: Đáp án A

Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên (Q) có dạng $2x + y - 3z + m = 0$

Điểm $M(-1;0;0) \in (P)$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là $d\left(M;(Q)\right) = \dfrac{11}{2\sqrt{14}}$

$$\Rightarrow \frac{|-2+m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{2\sqrt{14}} \Leftrightarrow |m-2| = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{15}{2} \\ m = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow (Q): \left[\begin{array}{l} -4x - 2y + 6z + 7 = 0 \\ 4x + 2y - 6z + 15 = 0 \end{array}\right.$$

Câu 44: Đáp án C

Qua M kẻ MF song song với SC và qua N kẻ NE song song với SC với E và F thuộc CA và CB. Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang MNEF.

Đặt $V_{S.ABC} = V;\ V_{MNEFCS} = V_1;\ V_{MNEFAB} = V_2$

$V_1 = V_{SCEF} + V_{SFME} + V_{SMNE}$

Ta có:

$$\frac{V_{SCEF}}{V} = \frac{CF}{CA}.\frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{V_{SFME}}{V_{SFEA}} = \frac{CM}{SE}.\frac{SE}{CA} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{SFEA}}{V} = \frac{S_{EFA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EFA}}{S_{CEA}}.\frac{S_{CEA}}{S_{ABC}} = \frac{FA}{CA}.\frac{CE}{CB} = \frac{4}{9}$$

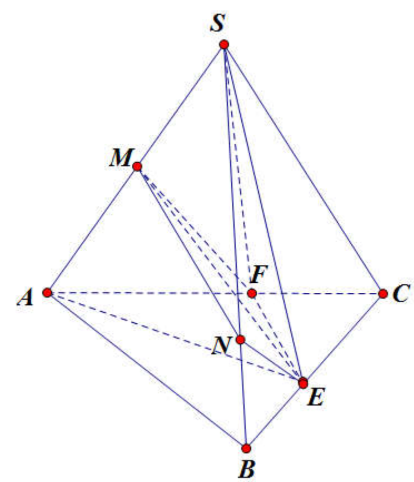
$$\Rightarrow \frac{V_{SFME}}{V} = \frac{1}{3}.\frac{4}{9} = \frac{4}{27}V$$

$$\frac{V_{SMNE}}{V_{SABE}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{V_{SMNE}}{V} = \frac{S_{\Delta BEA}}{S_{\Delta ABC}}.\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{EB}{CE}.\frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABE} = \frac{2}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{4}{27}V = \frac{4}{9}V$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$



Câu 45: Đáp án A

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1),(C_2)$ LÀ $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = 1; y = 1 \end{array}\right.$

Trong đoạn $x \in [0;1]$ suy ra $y = x^2;\ y = \sqrt{x}$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V_{Ox} = \pi\left|\int_0^1 (x^4 - x)dx\right| = \pi\left|\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right| = \frac{3\pi}{10}$

Câu 46: Đáp án D

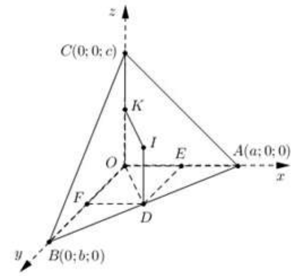
Ta có: $y' = \frac{\left(1 - \log\frac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{1 - \log\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2x\ln 10\sqrt{1 - \log\frac{1}{x}}};\ \left(\log\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\ln 10} = \frac{-1}{x\ln 10}$

Câu 47: Đáp án D

Gọi D, K lần lượt là trung điểm của AB, OC.

Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OAB) và cắt mặt phẳng trung trực của OC tại I

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC suy ra $z_1 = \dfrac{c}{2}$



Tương tự $DF = \dfrac{a}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{a}{2};\ y_1 = \dfrac{b}{2} \Rightarrow I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$

Suy ra $x_1 + y_2 + z_2 = \dfrac{a+b+c}{2} = 1 \Rightarrow I \in (P): x + y + z - 1 = 0$

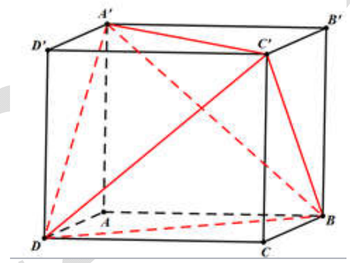
Vậy khoảng cách từ điểm M đến (P) bằng $d = \dfrac{2015}{\sqrt{3}}$

Câu 48: Đáp án D

$z^4 - 2z^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 - 1\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ z^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm i\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 2;\ z_2 = -2 \\ z_3 = i\sqrt{2};\ z_4 = -i\sqrt{2} \end{array}\right.$

Khi đó $A(2;0), B(-2;0), C\left(0;\sqrt{2}\right), D\left(0;-\sqrt{2}\right) \Rightarrow P = OA + OB + OC + OD = 4 + 2\sqrt{2}$

Câu 49: Đáp án C



Hướng dẫn: Khối chóp được phân chia thành 5 tứ diện: một tứ diện A'BC'D và bốn tứ diện còn lại bằng nhau.

$V_{A'BC'D} = V - 4.V_{C'CDB} = V - \dfrac{4V}{6} = \dfrac{V}{3}$

Câu 50: Đáp án B

Gọi độ dài đáy của hình chóp là x, với $0 < x < 1$. Đường cao hình chóp là

$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \sqrt{1 - x}$

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x} = \dfrac{1}{3}\sqrt{x^4 - x^5}$

Xét hàm $f(x) = x^4 - x^5$, với $x \in (0;1)$

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 5x^4 = x^3(4-5x);\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \frac{4}{5}$

Như vậy để thể tích khối chóp lớn nhất thì $x = \frac{4}{5}$