Đáp án

1.A	2.D	3.A	4.B	5.C	6.D	7.B	8.D	9.C	10.A
11.B	12.C	13.B	14.D	15.D	16.A	17.A	18.D	19.D	20.A
21.C	22.C	23.B	24.A	25.A	26.D	27.A	28.A	29.C	30.B
31.D	32.C	33.B	34.D	35.C	36.A	37.D	38.A	39.C	40.C
41.A	42.C	43.A	44.B	45.C	46.B	47.D	48.D	49.A	50.B

Câu 1: Đáp án A.

Ta có: $S = x_1 + x_2 + ... + x_{12} = x_1 + 1,1x_1 + 1,1^2 x_1 + ... 1,1^{11} x_1$

$= x_1\left(1+1,1+1,1^2+...+1,1^{11}\right) = 40.\dfrac{1-1,1^{12}}{1-1,1} = 855,4$

Lưu ý: Nếu u_n là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ thì S_n được tính theo công thức $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

Câu 2: Đáp án D.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ và

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$

Câu 3: Đáp án A.

Ta có: $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{5}{6}$

Lại có: $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$

Vậy $\dfrac{f'(x)}{g(x)} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 4: Đáp án B

Ta có: $\begin{cases} M \in (MCD) \\ M \in (SAB) \\ AB//CD \end{cases} \Rightarrow (MCD) \cap (SAB) = \Delta$ (với Δ là đường thẳng qua M và $\Delta // AB // CD$)

$\Rightarrow (MCD) \cap SB = SB \cap \Delta = \{N\} \Rightarrow MN // AB // CD.$

Câu 5: Đáp án C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{4x+4}{x-1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{4}{x-1} - (x-1)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại 2 điểm.

Câu 6: Đáp án D.

Ta có $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vì $x > 0$ nên $x = \sqrt{3}$. Ta có $y\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Câu 7: Đáp án B.

Ta có: $\log_a x = 2 \Rightarrow a = \sqrt{x}; \log_b x = 3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{x}$

Thay vào biểu thức, ta được:

$$\log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}} x = -6$$

Câu 8: Đáp án D.

Ta có: $z = (1-2i)^2 = -3-4i \Rightarrow \frac{1}{z} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

Từ đó suy ra $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}.$

Câu 9: Đáp án C.

Gọi đường thẳng đã cho là d và nhận $\vec{u}(1;1;-1)$ làm một vecto chỉ phương.

Gọi H là một điểm nằm trên đường thẳng đã cho, ta có: $H(1+t;1+t;-t)$, để H là hình chiếu của M lên đường thẳng thì $MH \perp d$ hay $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(t)+1(t-2)-1(-t-2)=0 \Leftrightarrow t=0$

Khi đó $H(1;1;0)$ và $d(M,d)=MH=2\sqrt{2}$.

Câu 10: Đáp án A.

Dễ thấy đáp án A có $\overrightarrow{U}=(1;1;1)$ cùng vuông góc với hai vecto chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Câu 11: Đáp án A.

$$\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x=-\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}+2\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ;k\in\mathbb{Z}.$$

Do $S\subset\left[\frac{-3\pi}{2};-\pi\right)$ nên $S=\left\{\frac{-7\pi}{6}\right\}$.

Câu 12: Đáp án C.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}-m\right)=-m\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(mx+2)=2\\ f(0)=-m\end{cases}$$

Suy ra để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 13: Đáp án B.

Gọi x_o là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành. Khi đó:

$$y'(x_o)=0 \Leftrightarrow \frac{2x_0^3-6x_0^2}{(x_0-2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=3 \end{array}\right..$$

Với $x=0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là $y=-27(tm)$.

Với $x=3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là $y=0$ (loại do trùng với Ox).

Vậy chỉ có một tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành.

Câu 14: Đáp án D.

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-6;-3)$. Với $\begin{cases} A(2;4) \\ B(5;1) \\ C(-1;-2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'(-4;1) \\ B'(-1;-2) \\ C'(-7;-5) \end{cases} \Rightarrow G_{\Delta A'B'C'}(-4;-2).$$

Câu 15: Đáp án D

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}}{-x-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{-\sqrt{x+1}}=-\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tất cả ba đường tiệm cận.

Câu 16: Đáp án A.

Vì hàm số *g(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} g'(x)=0 \\ g''(x)<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Quan sát bốn đồ thị hàm số thấy chỉ có đồ thị hàm số A đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 17: Đáp án A.

Điều kiện: $x \in (0;+\infty) \setminus \{1;2\}$ (*).

$$\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} - \frac{2\log_2 x}{\log_2 x - 1} \le 1.$$

Đặt $t = \log_2 x$

$$\Rightarrow \frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \le 1 \Leftrightarrow t \in (-\infty;-1] \cup \left(0;\frac{1}{2}\right] \cup (1;+\infty)$$

$\Rightarrow x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup \left(1;\sqrt{2}\right] \cup (2;+\infty)$. Kết hợp điều kiện (*) $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right] \cup \left(1;\sqrt{2}\right] \cup (2;+\infty)$.

Câu 18: Đáp án D.

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \int x\sqrt{x}.\frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x\sqrt{x} + C = \frac{2}{9} x\sqrt{x}(3\ln x - 2) + C$$

Câu 19: Đáp án D.

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi\left(\int_0^2 4x^2 dx - \int_0^2 x^4 dx\right)$

Câu 20: Đáp án A.

$$f(\tan x) = \cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x) = \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2+\pi}{8}.$$

Câu 21: Đáp án C.

Đặt $z = x + yi$. Ta có: $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z + \bar{z}| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ phương trình có bốn cặp nghiệm hay có tất cả bốn số phức z thỏa mãn.

Câu 22: Đáp án C.

Đặt $z = x + yi$. Ta có: 7

Đặt $z = x + yi$. Ta có: $2|z-1| = |z + \bar{z} + 2|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(2x+2)^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{4}$.

Câu 23: Đáp án B.

Gọi khối lăng trụ tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho là $ABC.A'B'C' \Rightarrow AA' = h$.

Đặt $AB = x \Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. Vì lăng trụ nội tiếp hình trụ có bán kính là $a \Rightarrow \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = a \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}.h = \dfrac{3a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Câu 24: Đáp án A.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O} \Rightarrow I(0;0;0)$

Ta có:

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|4\overrightarrow{MI}\right|$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right| \min \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| \min$

$\Rightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(P) \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Câu 25: Đáp án A.

Gọi $A = d \cap (P) \Rightarrow A(1;1;1)$. Mặt khác Δ cũng cắt đường thẳng $d \Rightarrow A \in \Delta$.

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (5;-1;-3)$.

Đường thẳng Δ

$\begin{cases} qua\ A(1;1;1) \\ \overrightarrow{u_\Delta} = (5;-1;-3) \end{cases} \Rightarrow \Delta: \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 26: Đáp án D.

TH1: Xét số 0 đứng tùy ý: Số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và 5 là: $C_7^3.2!.4!$

TH2: Xét số 0 luôn đứng đầu: Số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và 5 là: $C_2^6.2!.3!$

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$C_7^3.2!.4! - C_6^2.2!.3! = 1500.$

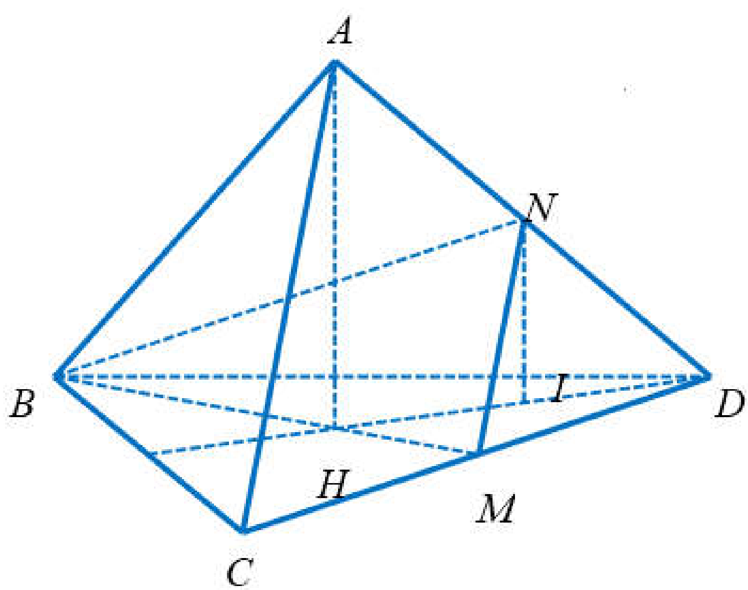
Câu 27: Đáp án A.

Gọi $I = AG \cap CD \Rightarrow C$ là trung điểm của ID.

Xét ΔSCD bị cắt bởi đường thẳng IK ta có:

$\frac{SK}{KD}.\frac{DI}{IC}.\frac{CM}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KD}.2.1 = 1 \Rightarrow \frac{SK}{KD} = \frac{1}{2}.$

Câu 28: Đáp án A.



Gọi N là trung điểm $AD \Rightarrow MN // AC$

$\Rightarrow d(AC;BM) = d(AC;(MNB)) = d(D;(MNB)).$

Gọi I là hình chiếu của N trên $(ABC) \Rightarrow \begin{cases} NI // AH \\ NI = \frac{AH}{2} \end{cases}.$

$\Rightarrow V_{I.MND} = \frac{1}{3}.NI.S_{\Delta BMD} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$

Ta có: $S_{\Delta MNB} \Rightarrow d(D;(MNB)) = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$

Vậy $d(BM;AC) = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$

Câu 29: Đáp án C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2-6mx-9m^2$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;1)\Leftrightarrow y'\le 0\forall x\in(0;1)$.

Khi đó phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1\le 0<x_2 \\ x_1<1\le x_2 \end{cases}$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3m \\ x=-m \end{array}\right.$.

TH1: $m>0\Rightarrow \begin{cases} x_1=-m \\ x_2=3m \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -m\le 0<3m \\ -m<1\le 3m \end{cases}\Leftrightarrow m\ge \dfrac{1}{3}$.

Kết hợp TH2:

$m<0\Rightarrow \begin{cases} x_1=3m \\ x_2=-m \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 3m\le 0<-m \\ 3m<1\le -m \end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$.

Kết hợp $m<0\Rightarrow m\le -1$.

Kết hợp hai trường hợp suy ra $m\le -1$ hoặc $m\ge \dfrac{1}{3}$.

Câu 30: Đáp án B.

Đồ thị hàm số $y=\left|x^2-2x\right|\left(|x|-1\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $x=-1;x=0;x=1;x=2$ nên phương trình đã cho có tối đa 4 nghiệm thực.

Câu 31: Đáp án D.

Đặt $t=\log_3 x\Rightarrow \begin{cases} x_1=3^{t_1} \\ x_2=3^{t_2} \end{cases}$. Ta có: $\begin{cases} t_1+t_2=3 \\ t_1.t_2=2m-7 \end{cases}$

Ta có: $(x_1+3)(x_2+3)=72\Leftrightarrow 3^{t_1+t_2}+3\left(3^{t_1}+3^{t_2}\right)+9=72$

$\Leftrightarrow 3^{t_1}+3^{t_2}=12$ (1)

Thế $t_2=3-t_1$ vào (1) ta có:

$3^{t_1}+3^{3-t_1}=12\Leftrightarrow 3^{2t_1}-12.3^{t_1}+27=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{t_1}=3 \\ 3^{t_1}=9 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_1=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow t_1.t_2 = 2 \Leftrightarrow 2m - 7 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$. Thử lại ta thấy $m = \frac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Đáp án C.

$f'(x) \geq x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^2}{2} + \ln x + C$. Vì $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

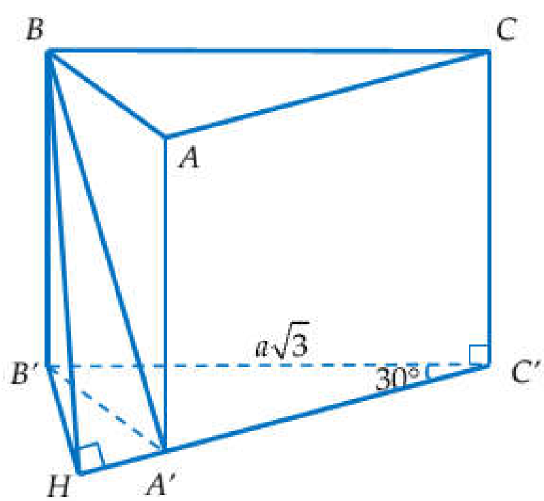
$\Rightarrow f(x) \geq \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) \geq \frac{5}{2} + \ln 2.$

Câu 33: Đáp án B.

Ta có $e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$ (do hàm số $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 0$).

Suy ra $V = \pi\int_0^1 e^{2x-2}dx + \pi\int_1^2 (2-x)^2\, dx = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}$

Câu 34: Đáp án D.



Ta có: $B'H = \sin 30°.B'C' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $BHB' = 60° \Rightarrow BB' = B'H.\tan 60° = \frac{3a}{2}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 35: Đáp án C.

Gọi $C(a;b;c)$, ta có $d(C,Ox)=\sqrt{b^2+c^2}$ và $d(C;\Delta)=\sqrt{a^2+(c-1)^2}$. Do đó $a^2=b^2+2c-1$.

$\Rightarrow BC=\sqrt{b^2+2c-1+(b-4)^2+c^2}\geq\sqrt{6}$

Câu 36: Đáp án A.

Xác suất một lần gieo được mặt một chấm là $\frac{1}{12}\Rightarrow$ Xác suất để cả ba lần không gieo được mặt một chấm là $\left(1-\frac{1}{12}\right)^3=\left(\frac{11}{12}\right)^3\Rightarrow$ Xác suất để có ít nhất một lần gieo được mặt một chấm trong ba lượt gieo là: $P=1-\left(\frac{11}{12}\right)^3=\frac{397}{1728}$.

Câu 37: Đáp án D.

Đặt $\begin{cases}U_1=2.000.000\\d=200.000\\q=1+0,55\%\end{cases}$. Gọi M_i là số tiền người đó có được sau i tháng gửi tiền $i=1,2,3,...60$.

Ta có:

$M_1=U_1.q$

$M_2=(U_1q+U_1+d)q=U_1q^2+U_1q+dq$

$M_3=(U_1q^2+U_1q+dq+U_1+2d)q$

$=U_1q^3+U_1q^2+U_1q+dq^2+2dq$

$M_4=(U_1q^3+U_1q^2+U_1q+dq^2+2dq+U_1+3d)q$

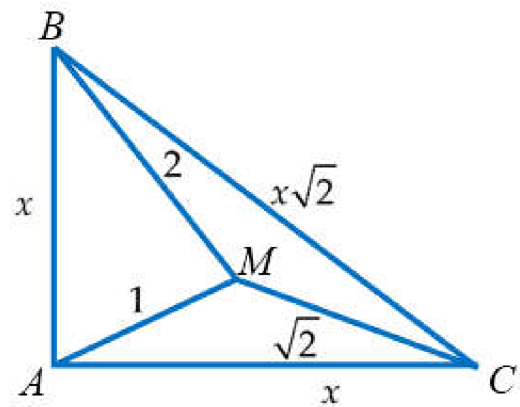
$=U_1q^4+U_1q^3+U_1q^2+U_1q+dq^3+2dq^2+3dq$

……

$M_{60}=U_1.q(q^{59}+...+q^2+q+1)+d(q^{59}+2q^{48}+...+59q)$

$=U_1.q.\frac{1-q^{60}}{1-q}+d\sum_{x=0}^{58}\left[(x+1)q^{59-x}\right]=539447312.$

Câu 38: Đáp án A.



$\cos BMC = \dfrac{6-2x^2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3-x^2}{2\sqrt{2}}$

$\cos AMC = \dfrac{3-x^2}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AMC = BMC = \alpha\left(\alpha > \dfrac{\pi}{2}\right).$

Ta có:

$AC = 3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha$

$AB = 5 - 4\cos(2\pi - 2\alpha)$

Vì ΔABC vuông cân

$3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha = 5 - 4\cos(2\pi - 2\alpha)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}(l) \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \alpha = 180 - 45° = 135°.$

Câu 39: Đáp án C.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có: $\begin{cases}(ACD)\perp(BCD) \\ (ACD)\cap(BCD) = CD \Rightarrow BH \perp (ACD). \\ BH \perp CD\end{cases}$

Vì các tam giác $\Delta DAB, \Delta CAB$ cân nên $\begin{cases} DI \perp AB \\ CI \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left((ABD);(CBD) \right) = CID$

Ta có: $BH = AH = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$.

Vì I là trung điểm $AB \Rightarrow AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2a^2 - 2x^2}}{2}$.

Xét ΔDIA vuông tại I ta có:

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2 - 2x^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2 + 2x^2}{4}}$$

Để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau thì $CID = 90°$ khi đó ta có:

$$CD^2 = DI^2 + CI^2 = 2DI^2 \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{2a^2 + 2x^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 40: Đáp án C.

Gọi $M\left(m; m^3 - 3m\right)$ thì phương trình tiếp tuyến Δ tại M là: $y = f'(m)(x - m) + f(m)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ là:

$$f(x) = f'(m)(x - m) + f(m) \Leftrightarrow (x - m)^2 (x + 2m) = 0$$

Khi đó $x_A = -2m$. Ngoài ra $x_B = \dfrac{2m^3}{3m^2 - 3}$. Do đó yêu cầu bài toán sẽ được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \frac{-2m + \frac{2m^3}{3m^2 - 3}}{2} = m \neq -2m \Leftrightarrow 5m^2 = 6.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Đáp án A.

Đặt $u = x^2 - 2x$ ta có $y' = (2x - 2) f'(u)$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 42: Đáp án C.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3x+3y)+(3x+3y)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{3}} t+t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}}+1>0$ với mọi $t>0$. Từ đó ta có

$f(3x+3y)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow 3x+3y=x^2+y^2+xy+2$

Khi đó $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$ có giá trị lớn nhất là 1.

Câu 43: Đáp án A.

Phương trình tương đương với:

$\log_{\sqrt{mx-5}}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<mx-5\neq 1 \\ 2x^2-5x+4>0 \\ 2x^2-5x+4=x^2+2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<mx-5\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Đặt $10m=k\in\mathbb{Z}$, ta có: $\begin{cases} 0<\dfrac{kx}{10}-5\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases}$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì có 2 trường hợp sau:

- $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{2k}{10}-5\leq 0 \\ \dfrac{2k}{10}-5=1 \end{array}\right. \\ 0<\dfrac{5k}{10}-5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow k\in\{11;13;14;...;25;30\}$

- $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{5k}{10}-5\leq 0 \\ \dfrac{5k}{10}-5=1 \end{array}\right. \\ 0<\dfrac{2k}{10}-5\neq 1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy có tất cả 15 số nguyen k tương ứng với 15 giá trị của m.

Câu 44: Đáp án B.

$L=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$. Đặt $u=\sqrt{1+x^2}$ ta có:

$$L=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{u^2}{u^2-1}du=\left(u+\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Do đó $m=2,n=3\Rightarrow m^2-mn+n^2=7.$

Câu 45: Đáp án C.

Với $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, ta có:

$$z.\overline{z}=|z|^2=1\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\a,b\in[-1;1]\\\overline{z}=\dfrac{1}{z}\end{cases}$$

Do đó biến đổi $P,$ ta được:

$$P=|z(z-1)|+\left|z\left(z+1+\frac{1}{z}\right)\right|=|z-1|+\left|z+1+\frac{1}{z}\right|$$

$$=|z-1|+|z+1+\overline{z}|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}+|2a+1|$$

$$=\sqrt{2(1-a)}+|2a+1|$$

Khảo sát hàm $f(a)=\sqrt{2(1-a)}+|2a+1|$ trên đoạn $[-1;1]$ ta được $\max P=\frac{13}{4}\Leftrightarrow a=\frac{7}{8}.$

Câu 46: Đáp án

Ta có công thức tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ trong bài này như sau:

$$\frac{x^3}{6}\sqrt{1-\cos^2 60-\cos^2 60-\left(\frac{2x^2-12}{2x^2}\right)^2+2\cos 60.\cos 60\left(\frac{2x^2-12}{2x^2}\right)}=2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$$

Câu 47: Đáp án D.

Đường thẳng EM cắt AD,AB lần lượt tại X,Y. Các đường thẳng YN,AC cắt nhau tại Z. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BD. Áp dụng định lí Menelaus ta có:

$\frac{YA}{YB}.\frac{EB}{EK}.\frac{MK}{MA}=1\Rightarrow\frac{YA}{YB}=\frac{3}{4}.2=\frac{3}{2}$

$\frac{XA}{XD}.\frac{ED}{EB}.\frac{YB}{YA}=1\Rightarrow\frac{XA}{XD}=2.\frac{3}{2}=3$

Chú ý $\Delta ABC=\Delta ABD$ nên $\frac{AZ}{AC}=\frac{AX}{AD}=\frac{3}{4}$.

Do vậy $V_{AXYZ}=V_{ABCD}.\frac{AX}{AD}.\frac{AY}{AB}.\frac{AZ}{AD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}.\frac{3}{4}=\frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$

Câu 48: Đáp án D.

Gọi M là trung điểm BC. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc chóp tại O,K $\Rightarrow IO=IK=\Delta IOM=\Delta IKM$

Đặt $OM=OK=x\Rightarrow S_d=4x^2$

Gọi $h=SO=OM\tan 2\alpha=x.\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=x.\frac{2.\frac{a}{x}}{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{2a}{1-\frac{a^2}{x^2}}$

Từ đó suy ra thể tích V của khối chóp là:

$V=\frac{1}{3}4x^2.\frac{2a}{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{8}{3}.\frac{ax^4}{x^2-a^2}\geq\frac{32a^3}{3}$

Câu 49: Đáp án A.

Bán kính R của tam giác BCD là $\frac{5a\sqrt{3}}{8}$; R của tam giác ABC là a; $BC=a\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm của BC, G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Có: $HG=\sqrt{GC^2-CH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$

Từ đó suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

$R=\sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{91}}{8}$

Câu 50: Đáp án B.

Đặt $X(a;b;0),Y(c;d;0)$ thì $(a-c)^2+(b-d)^2=1$.

Theo bất đẳng thức Minkowski, ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2}+\sqrt{(c-a)^2+(d-a)^2}\ge 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2}\ge 4$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta được:

$$AX+BY=\sqrt{a^2+b^2+4}+\sqrt{(3-c)^2+(d-4)^2+1}\ge 5$$