

CHỦ ĐỀ :TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

I. NHẬN BIẾT

Câu 1: Điểm nào trong tam giác gọi là trọng tâm của tam giác? Hãy chọn câu đúng:

- (A). Giao của ba đường phân giác. (B). Giao của ba đường trung trực.
(C). Giao của ba đường trung tuyến. (D). Giao của ba đường cao.

Đáp án C.

Câu 2: Trong một tam giác có bao nhiêu đường trung tuyến? Hãy chọn câu đúng:

- (A). 1; (B). 2; (C). 3; (D). 4.

Đáp án C.

Câu 3: Khẳng định nào là đúng:

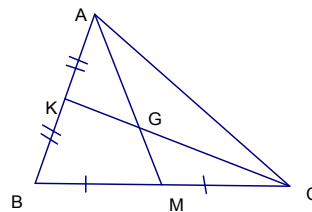
- (A). Đường trung tuyến nối từ đỉnh tam giác đến một điểm thuộc một cạnh.
(B). Đường trung tuyến là đường thẳng xuất phát từ một đỉnh của tam giác đến trung điểm của một cạnh đối diện
(C). Đường trung tuyến là đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh trong tam giác.
(D). Đường trung tuyến là đường thẳng xuất phát từ một đỉnh của tam giác vuông góc với cạnh đối diện.

Đáp án B

Câu 4: Cho hình vẽ, hãy điền vào chỗ trống:

- (A). $GK = \dots CK$ (B). $AG = \dots GM$
(C). $KG = \dots CG$ (D). $AM = \dots AG$

Đáp án: (A). $\frac{1}{3}$; (B). 2; (C). $\frac{1}{2}$ (D). $\frac{3}{2}$



II. THÔNG HIỂU

Câu 1: Hãy chọn câu sai. Cho tam giác ABC, có trung tuyến AM, trọng tâm G thì:

- (A). $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$; (B). $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$; (C). $\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$; (D). $\frac{AM}{GM} = \frac{1}{3}$

Đáp án: D

Câu 2: Nếu đặt một miếng bìa hình tam giác lên giá nhọn, để miếng bìa đó đứng cân bằng thì điểm đặt phải là:

- (A). Trục tâm (B). Trọng tâm;
(C). Giao điểm ba đường phân giác.
(D). Giao điểm ba đường trung trực;

Đáp án B.

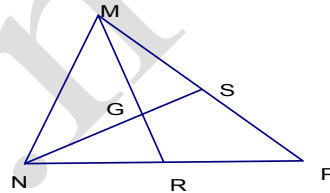
Câu 3: Cho tam giác ABC cân tại B, đường trung tuyến BM, biết BA = 10cm, AC = 12cm. Độ dài đường trung tuyến BM bằng:

- (A). 12cm; (B). 4,5cm; (C). 9cm; (D). 8cm.

Đáp án D.

Câu 4: Cho hình vẽ, MR và NS là đường trung tuyến của tam giác MNP. Hãy chọn câu sai:

- (A). $MG = \frac{2}{3} MR$; (B). $NG = \frac{1}{2} NS$
(C). $NG = \frac{2}{3} NS$ (D). $GR = \frac{1}{3} MR$



Đáp án B.

Không chỉnh sửa

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB=6cm, AC=8cm. Kẻ trung tuyến BM, lấy điểm G trên đoạn thẳng BM sao cho BG=2GM. Kẻ AG cắt BC tại N. Hãy chọn câu đúng:

- (A). BN=5cm (B). BN=10cm
(C). G là trọng tâm tam giác ABC (D). GA = 3GN

Đáp án A,C

III. VẬN DỤNG

Câu 1: Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng AM vuông góc với BC

b) Biết AB = AC = 17cm, BC = 16cm, tính độ dài đường trung tuyến AM.

Đáp án:

$$\Delta ABM = \Delta ACM \text{ (c-c-c)}$$

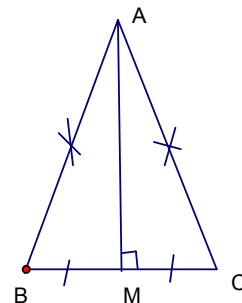
$$\rightarrow \angle AMB = \angle AMC \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Mà $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ nên $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$
hay AM vuông góc với BC.

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{16}{2} = 8\text{cm.}$$

Áp dụng định lý Pitago vào ΔABM vuông tại M ta có:

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 = 15^2$$



→ $AM = 15\text{cm}$

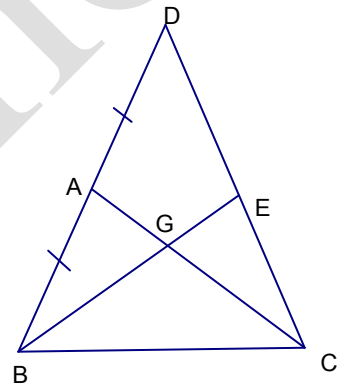
Câu 2: Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên cạnh AC lấy điểm G sao cho $AG = \frac{1}{3} AC$. Gọi E là giao điểm của BG và DC .

- a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của ΔBCD
b) Biết $DC = 8\text{cm}$. Tính độ dài đoạn EC .

Đáp án:

Ta có $AD = AB$ (gt) nên CA là đường trung tuyến của ΔBCD , lại có $AG = \frac{1}{3} AC$ (gt) nên G là trọng tâm của ΔBCD .
Vì $BG \cap CD$ tại E nên BE là trung tuyến của ΔBCD .
Do đó E là trung điểm của DC .

$$\rightarrow EC = \frac{DC}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$$



Câu 3: Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Đáp án

Gọi G là giao điểm của BD và CE , ta có:

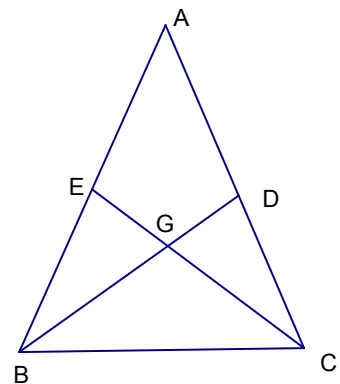
$$BG = \frac{2}{3} BD; \quad CG = \frac{2}{3} CE. \quad \underline{\text{Do}} \quad BD = CE$$

nên $BG = CG; \quad GD = GE$.

$$\rightarrow \Delta BGE = \Delta CGD \text{ (c-g-c)} \rightarrow BE = CD.$$

$$\text{Ta lại có: } BE = \frac{1}{2} AB; \quad CD = \frac{1}{2} AC \text{ nên } AB = AC$$

Vậy ΔABC là tam giác cân tại A .



Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , có hai cạnh góc vuông $AB = 3\text{cm}$,

AC = 4cm. Tính khoảng cách từ A tới trọng tâm G của tam giác ABC.

Đáp án

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại A ta có:

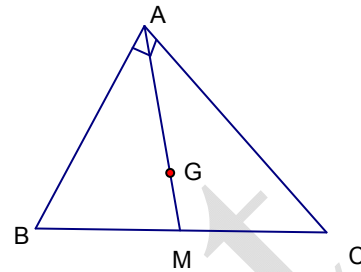
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 14 = 25$$

$$\rightarrow BC^2 = 5^2 \rightarrow BC = 5\text{cm.}$$

Do AM là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A nên ta có: $AM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5\text{cm.}$ (Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

Theo giả thiết thì G là trọng tâm ΔABC nên:

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot 2,5\text{cm} = \frac{5}{3} \text{cm.}$$



Câu 5: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi K là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia KA lấy điểm E sao cho $KE = KA$.

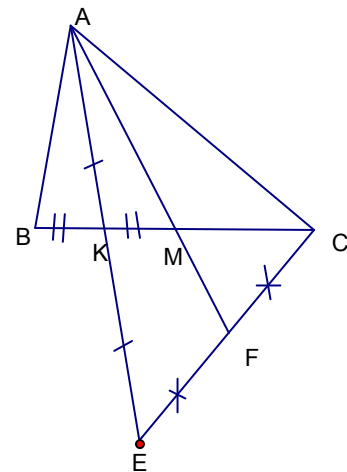
- a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?
 b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Đáp án:

Xét ΔACE , ta có: $KA = KE$ (gt)
 $\rightarrow CK$ là đường trung tuyến,

Mà $CM = \frac{2}{3} KC$ nên M là trọng tâm của ΔACE .

Vì F là trung điểm của EC (gt) nên AF là đường trung tuyến của ΔACE , mà M là trọng tâm nên AF đi qua M hay 3 điểm A, M, F thẳng hàng.



IV. VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

- c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $AM = \frac{1}{2} BC$.

d) Ngược lại, nếu $AM = \frac{1}{2} BC$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Đáp án

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD =$

$$MA. (1) \Rightarrow AM = \frac{1}{2} AD$$

$$+ \Delta BMD = \Delta CMA \quad (c - g - c)$$

$$\Rightarrow BD = AC \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

$$\text{và } \angle DBM = \angle C \quad (2 \text{ góc tương ứng}).$$

Do đó $BD \parallel AC$. Ta lại có $\angle A = 90^\circ$ nên $\angle ABD = 90^\circ$

$$+ \Delta CAB = \Delta DBA$$

(vì cạnh AB chung, $\angle A = \angle DBA = 90^\circ$, $AC = BD$).

$$\rightarrow BC = AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $AM = \frac{1}{2} BC$

Giả sử có $AM = \frac{1}{2} BC \rightarrow AM = MB = MC$

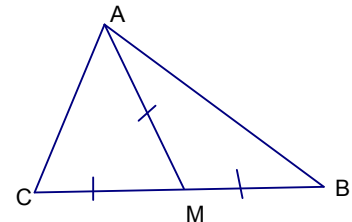
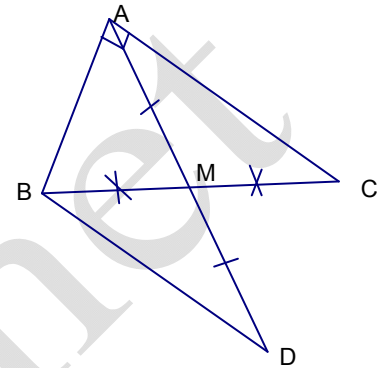
$\rightarrow \Delta MAB$ và ΔMAC đều cân tại M.

$$\angle C = \angle CAM; \quad \angle B = \angle BAM$$

$$\Rightarrow \angle CAM + \angle BAM = \angle C + \angle B$$

$$\text{Hay } \angle A = \angle B + \angle C = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A (đpcm).



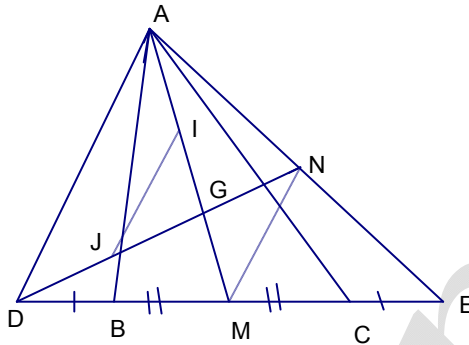
Câu 2: Cho tam giác ABC, có G là trọng tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D và trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh hai tam giác ABC và ADE có cùng trọng tâm G.

b) Gọi M là giao điểm của AG và BC , I là trung điểm của AG , N là giao điểm của DG và AE , J là trung điểm của DG .

Chứng minh rằng $IJ \parallel MM$ và $IJ = MN$.

Đáp án:



a) Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên: $AG = \frac{2}{3}AM$. (1)

Ta có $MB = MC$ và $BD = CE$ (giả thiết) nên $MB + BD = MC + CE$.

Hay $MD = ME \rightarrow AM$ là trung tuyến của $\triangle ADE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của $\triangle ADE$

Tức là $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có cùng trọng tâm G .

b) Vì I là trung điểm của AG (giả thiết) nên $IA = IG = \frac{1}{2}AG$, mà $GM = \frac{1}{2}AG$

$$\rightarrow IG = GM.$$

Ta có G là trọng tâm của $\triangle ADE$ nên DN là trung tuyến của $\triangle ADE$

$$\rightarrow GN = \frac{1}{2}DG \quad (3)$$

Mặt khác, vì J là trung điểm của DG (giả thiết) nên $JD = JG = \frac{1}{2}DG$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $GN = GJ$.

Xét $\triangle GIJ$ và $\triangle GMN$ có:

$$GI = GM \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\angle IGJ = \angle MGN \text{ (hai góc đối đỉnh);}$$

$$GJ = GN \text{ (chứng minh trên).}$$

Do vậy $\triangle GIJ = \triangle GMN$ (c-g-c).

$\rightarrow IJ = MN$ (hai cạnh tương ứng) và $\angle GIJ = \angle GMN$ (hai góc tương ứng).

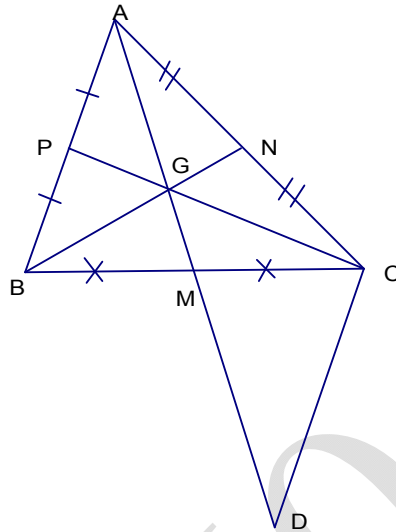
Mà $\angle GIJ$ và $\angle GMN$ ở vị trí so le trong nên $IJ \parallel MN$. (Đpcm).

Câu 3: Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AM, BN, CP và trọng tâm G .

Chứng minh rằng: a) $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

$$b). \frac{3}{4} (AB + AC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA.$$

Đáp án



a) Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD. Khi đó ta có:

$\triangle AMB = \triangle DMC$ (c-g-c). $\rightarrow AB = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle ACD$ có: $AC + CD > AD$ (bất đẳng thức tam giác)

$$\Leftrightarrow AC + AB > 2 \cdot AM \Leftrightarrow AM < \frac{1}{2} (AB + AC) \quad (\text{đpcm}).$$

b)

+ Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$$AM < \frac{1}{2} (AB + AC)$$

$$BN < \frac{1}{2} (BA + BC)$$

$$CP < \frac{1}{2} (CA + CB)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$AM + BN + CP < AB + BC + CA. \quad (1).$$

+ Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được

$$BN + CP > \frac{3}{2} BC$$

$$CP + AM > \frac{3}{2} CA$$

$$AM + BN > \frac{3}{2} AB$$

Thật vậy: Xét $\triangle GBC$ có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mặt khác: $GB = \frac{2}{3}BN$; $GC = \frac{2}{3}CP$ (tính chất trọng tâm $\triangle ABC$).

Từ đó ta có: $\frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > BC \rightarrow BN + CP > \frac{3}{2}BC$

Chứng minh tương tự ta được: $CP + AM > \frac{3}{2}CA$

$$AM + BN > \frac{3}{2}AB$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} (AB + BC + CA) < 2(AM + BN + CP) \\ \rightarrow & \frac{3}{4} (AB + \underline{AC} + CA) < AM + BN + CP. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3}{4} (AB + BC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA. \quad (\text{đpcm}).$$