

Dạng toán 5. Giải các phương trình tổ hợp

* Công thức:

① $P_n = n! = 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

② $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (n, k \in \mathbb{N}^* \text{ và } k \leq n)$

③ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n, k \in \mathbb{N}^* \text{ và } k \leq n)$

* Tính chất:

① $A_n^k = C_n^k \cdot k! \quad \text{②} \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{③} \quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

Bài 68. Giải các phương trình:

a) $C_n^2 = 45$

b) $A_n^3 + 2 = 506$

c) $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$

d) $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$

e) $3C_{n+1}^n + 8C_{n+2}^{n-2} = 3C_{n+1}^3$

f) $C_n^1 + 6(C_n^2 + C_n^3) = 9n^2 - 14n$

Đáp số: a) $n = 10$

b) $n = 9$

c) $n = 5$

d) $n = 10$

e) vô nghiệm

f) $n = 7$

Bài 69. Biết $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức

$$M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$$

Đáp số: $n = 5 \Rightarrow M = \frac{3}{4}$

Bài 70. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 có 6 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 288 tam giác được tạo thành từ $n+6$ điểm trên d_1 và d_2 . Tìm n .

Đáp số: $n = 8$

Bài 71.a) Cho một đa giác đều n đỉnh ($n \geq 3$). Tìm n , biết rằng đa giác đã cho có 27 đường chéo.

Đáp số: $n = 9$

b) Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Tìm n , biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A .

Đáp số: $n = 18$

Chủ đề 2. NHỊ THỨC NIU TƠN

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Dạng toán 1. Khai triển nhị thức

Bài 72. Khai triển các nhị thức:

- | | | |
|------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(x+2)^4$ | b) $(2x+1)^6$ | c) $(x-2)^6$ |
| d) $(2x-1)^5$ | e) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^7$ | f) $(x+2y)^5$ |
| g) $(2-x)^4$ | h) $x(2x-1)^6$ | i) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$ |
| k) $x^2(1-2x)^5$ | l) $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^6$ | m) $\left(\frac{1}{2x} - 2x\right)^6$ |

Dạng toán 2. Tìm hệ số (số hạng) của x^k trong khai triển $P(x)$ thành đa thức

Cách 1: Khai triển $P(x)$. Từ đó trả lời kết quả hệ số của x^k

Cách 2: Sử dụng khai triển tổng quát $\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ (Nhớ xác định a, b, n cho chính xác)

- Bước 1: Xác định a, b, n và rập vào công thức trên
- Bước 2: Thu gọn phần **hệ số** và **phần biến** trong công thức vừa lập.
- Bước 3: Đồng nhất lũy thừa của biến với yêu cầu đề. Từ đây, suy ra kết quả.

Bài mẫu 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$

Lời giải

♥ Khai triển nhị thức Niuton ta có:

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k x^{18-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{18-3k}$$

♥ Chọn k thỏa mãn: $18-3k = 12 \Leftrightarrow k = 2$

♥ Vậy hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển là $(-1)^2 C_{18}^2 = 153$.

Bài mẫu 2: Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton của

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$$

Lời giải

♥ Khai triển nhị thức Niuton ta có:

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k x^{18-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{18-3k}$$

♥ Chọn k thỏa mãn: $18-3k=0 \Leftrightarrow k=6$

♥ Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^6 C_{18}^6 = 18564$.

Bài 73. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển:

a) $(x-3)^9$ b) $(2x-1)^{12}$

Đáp số: a) 10206 b) 25344

Bài 74. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(3x-x^2)^{12}$

Đáp số: $-3^9 C_{12}^9$

Bài 75. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển:

a) $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$ b) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

Đáp số: a) 12 b) $2^8 C_{12}^8$

Bài 76. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

a) $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$ b) $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$

Đáp số: a) 45 b) 28

Bài 77. Tìm hệ số của $x^4 y^9$ trong khai triển $(2x-y)^{13}$

Đáp số: -11440

Bài 78. a) Khai triển và rút gọn $(2x+1)^4 + (3+x)^5$ thành đa thức.

b) Trong khai triển và rút gọn của $(1-2x)^8 + (1+3x)^{10}$, hãy tính hệ số của x^3 .

Đáp số: b) 2792

Bài 79. Xét khai triển của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3

Đáp số: $C_{15}^9 (-2)^9$

Bài 80. Xét khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Tìm a_5 , biết $a_n + a_1 + a_2 = 71$

Đáp số: $n=7 \Rightarrow a_5 = -672$

Bài 81. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$, biết $C_n^1 + C_n^3 = 13n$

Đáp số: $n = 10$. Hệ số cần tìm 210

Bài 82. Giả sử khai triển $(1 + 2x)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$.

a) Tính a_9 .

b) Tính $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$.

Đáp số: a) $C_{15}^9 2^9$ b) $S = 3^{15}$

Bài 83.

a) Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ bằng 90. Tìm n .

b) Trong khai triển của $(x - 1)^n$, hệ số của x^{n-2} bằng 45. Tính n .

Đáp số: a) $n = 5$ b) $n = 10$

Bài 84. Cho $P(x) = x^2(x + 2)^5 + x(1 - 2x)^6$

Khai triển $P(x)$ thành đa thức

Tìm hệ số chứa x^4 trong khai triển trên.

Đáp số: a) $P(x) = 65x^7 - 182x^6 + 280x^5 - 80x^4 + 140x^3 + 20x^2 + x$ b) -80

Bài 85. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$.

Đáp số: $n = 11, k = 5, C_{11}^5 (-2)^5$

Bài 86. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-ton $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, với $x \neq 0$.

Đáp số: $n = 2 \Rightarrow -\frac{35}{16}x^5$

Bài 87.

a) Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in N^*$ và các hệ số

a_1, a_2, \dots, a_n thỏa mãn $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm a_8

Đáp số: $n = 2 \Rightarrow a_8 = 126720$

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2 + x)^n$, biết:

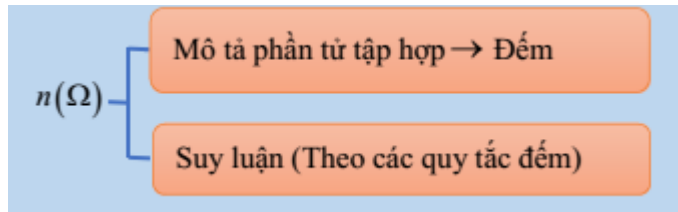
$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$$

Đáp số: $n = 11$, Hệ số cần tìm 22

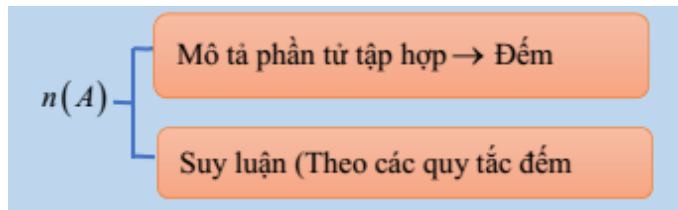
Chủ đề 3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

* CÁC BƯỚC THỰC HIỆN

- Đếm số kết quả của tập không gian mẫu:



- Đếm số kết quả của tập biến cố A (Tập A là tập con của tập Ω)



- Xác suất cần tìm $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

* TÍNH CHẤT:

- ① $0 \leq p(A) \leq 1$
- ② Gọi \bar{A} là biến cố đối của A. Khi đó: $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

Bài mẫu 1: Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi được chọn có đủ cả ba màu.

Lời giải

♥ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

♥ Gọi A là biến cố: “3 viên bi được chọn có đủ cả ba màu”

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = C_3^1 C_4^1 C_5^1 = 60$

♥ Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

Bài mẫu 2: Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Lời giải

♥ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{25}^4 = 12650$

♥ Gọi A là biến cố: “4 học sinh được gọi có cả nam và nữ”