Vectơ trong không gian

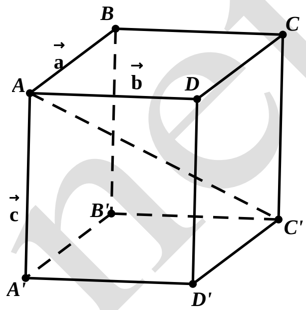
A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Các khái niện và các phép toán của vec tơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng.Ngoài ra ta cần nhớ thêm:

1. Qui tắc hình hộp : Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



2. Qui tắc trọng tâm tứ diện.

G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra:

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \forall M$

3. Ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện cần và đủ để ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

Cho hai vec tơ không cùng phương khi đó điều kiện cần và đủ để ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Nếu ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vec tơ $\vec{d}$ đều có thể phân tích một cách duy nhất dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Phương pháp:

Sử dụng qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ giác, qui tắc hình bình hành, qui tắc hình hộp…để biến đổi vế này thành vế kia.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật . Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.

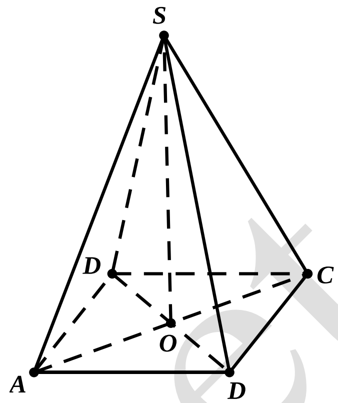
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$

Ta có $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right|$.

$\overrightarrow{SA}^2 = \left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$ (1)

$\overrightarrow{SC}^2 = \left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$

$= 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$ (vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$).

Tương tự $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$.

Chứng minh với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Lời giải.

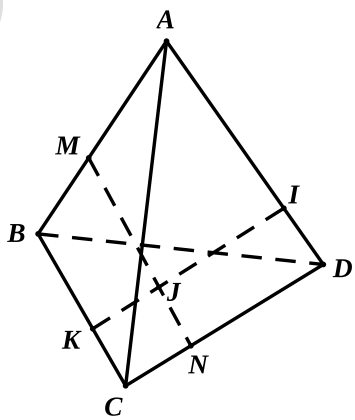
Vì $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ nên với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$.

Tương tự ta có :

$\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}$,

$\overrightarrow{OK} = \dfrac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$, $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}$.



Từ đó ta có

$\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{1-k}.\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC}\right)$

$= \dfrac{1}{1-k}.\dfrac{1}{3}[(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}] = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}\right)$

Vậy $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH BA VEC TƠ ĐỒNG PHẲNG VÀ BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

Để chứng minh ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

- Chứng minh giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng.
- Phân tích $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vec tơ không cùng phương.

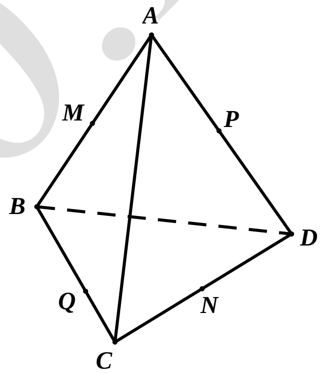
Để chứng minh bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau:

Điều kiện cần và đủ để điểm $D\in(ABC)$ là với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Gọi P,Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD},\ \overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\,(k\neq 1)$. Chứng minh M,N,P,Q đồng phẳng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MP}=k\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MP}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Suy ra $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

$=\dfrac{k}{k-1}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$)

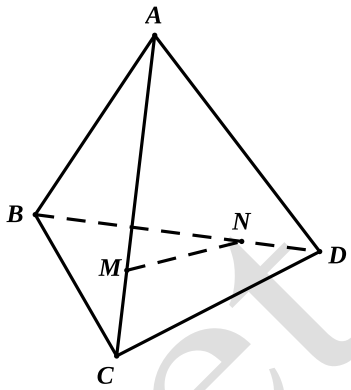
Mặt khác N là trung điểm của CD nên

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\dfrac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$ suy ra ba vec tơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, hay bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N xác định bởi $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}$ $(x,y\neq 1)$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.



$\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = \dfrac{\vec{a} - x\vec{c}}{1-x}$ (1).

Lại có $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{1-y}\vec{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \dfrac{-1}{1-x}\vec{a} + \dfrac{1}{1-y}\vec{b} + \dfrac{x}{1-x}\vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vec tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD}$, tức là

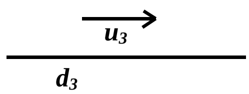
$\dfrac{-1}{1-x}\vec{a} + \dfrac{1}{1-y}\vec{b} + \dfrac{x}{1-x}\vec{c} = m\left(\vec{b} - \vec{a}\right) - n\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{1-x}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-y} - m\right)\vec{b} + \left(n + \frac{x}{1-x}\right)\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{1-x} \\ m = \dfrac{1}{1-y} \\ n = -\dfrac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Vậy ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x = y$.

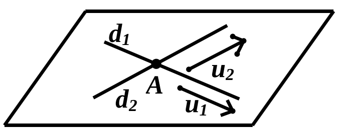
Lưu ý : Ta có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vec tơ để xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng:

Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt chứa ba vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ trong đó d_1, d_2 cắt nhau và $d_3 \not\subset mp(d_1, d_2)$.



Khi đó :

- $d_3 // (d_1, d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ đồng phẳng.
- $d_3 \cap mp(d_1, d_2) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ không đồng phẳng



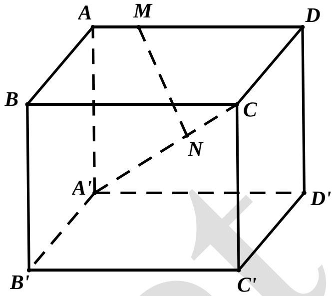
Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M, N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $MN // (BC'D)$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BB'}=\vec{b},\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vec tơ không đồng phẳng và

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BC'}=\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{BA'}=\vec{a}+\vec{b}$.



Ta có $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BM}\right)$

$\Rightarrow\frac{5}{4}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{5}=\frac{4\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{c}\right)}{5}=\frac{5\vec{a}+\vec{c}}{5}$.

Tương tự $\overrightarrow{BN}=\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}}{5}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}=-\frac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\frac{3}{5}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$

Suy ra $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng mà $N\notin\left(BC'D\right)\Rightarrow MN/\!/\left(BC'D\right)$.

Nhận xét: Có thể sử dụng phương pháp trên để chứng minh hai mặt phẳng song song.

Ví dụ 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
Chứng minh $\left(MGC'\right)/\!/\left(AB'N\right)$.

Lời giải.

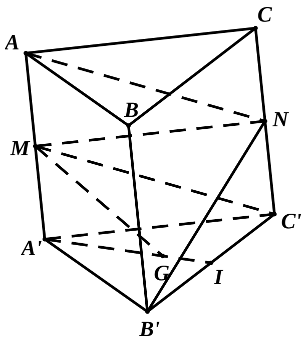
Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' nên

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

Vì G là trọng tamm của tam giác $A'B'C'$ nên

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$



Ta có

$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ suy ra $\overrightarrow{MG},\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AN}$ đồng phẳng, Mắt khác $G\notin\left(AB'N\right)\Rightarrow MG/\!/\left(AB'N\right)$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{k}=\overrightarrow{AN}$ $\Rightarrow MC'/\!/\left(AB'N\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}MG//(AB'N)\\MC'(AB'N)\end{cases}\Rightarrow\left(MGC'\right)/\!/\left(AB'N\right)$.

Bài toán 03: TÍNH ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.

Phương pháp:

Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích $\overrightarrow{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$
- Khi đó $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\left(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}\right)^2}$

$$= \sqrt{m^2\left|\vec{a}\right|^2 + n^2\left|\vec{b}\right|^2 + p^2\left|\vec{c}\right|^2 + 2mn\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2np\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right) + 2mp\cos\left(\vec{c},\vec{a}\right)}.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^0$. Tính độ dài đường chéo AC'.

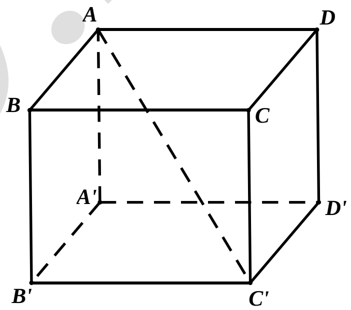
Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a, \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a}\right) = 60^0$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$



$= 3a^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^0 + 2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos 60^0 + 2\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 60^0 = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông canh a. Lấy M thuộc đoạn $A'D$, N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Tính MN theo a và x.

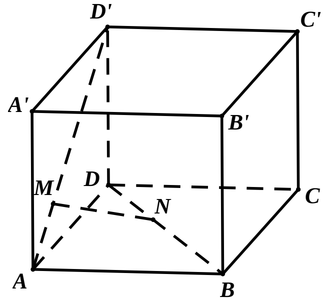
Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a, \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a}\right) = 90^0$

$\overrightarrow{DN} = \frac{DN}{DB}.\overrightarrow{DB} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AD'}.\overrightarrow{AD'} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$



Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}+\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

$=\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}$.

$MN^2=\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}\right)^2=\frac{x^2}{2a^2}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2\vec{b}^2+\frac{x^2}{2a^2}\vec{c}^2$

$=x^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}\right)a^2=\frac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2$

$MN=\sqrt{\frac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2}$.

Bài toán 04: SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN.

Phương pháp:

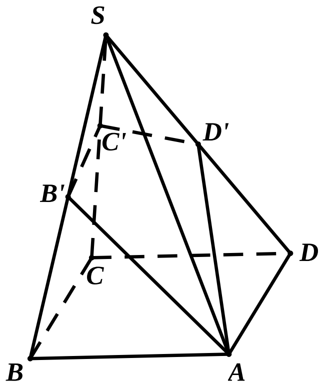
Sử dụng các kết quả

- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{DC}$
- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành . Gọi B',D' lần lượt là trungđiểm của các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính $\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải.



Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SA},\vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $m=\frac{SC'}{SC}$

Ta có $\overrightarrow{SB'}=\frac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{SD'}=\frac{1}{2}\vec{c}$ và

$\overrightarrow{SC'}=m\overrightarrow{SC}=m\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}\right)=m\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SC'}=2m\overrightarrow{SB'}-m\overrightarrow{SA}+2m\overrightarrow{SD'}$

Do A,B',C',D' đồng phẳng nên

$2m+(-m)+2m=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$

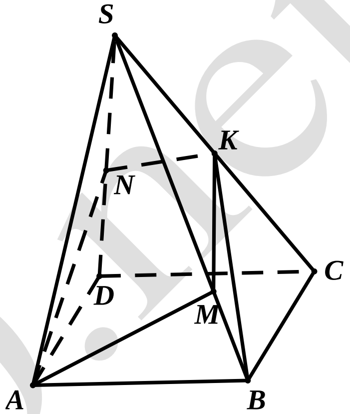
Vậy $\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N. Chứng minh $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Lời giải.

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA}, \vec{b}=\overrightarrow{SA}, \vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $\frac{SB}{SM}=m,\ \frac{SD}{SN}=n$.

Ta có $\overrightarrow{SM}=\frac{SM}{SB}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{m}\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SN}=\frac{SN}{SD}\overrightarrow{SD}=\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$



$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)$

$=\frac{n}{2}\overrightarrow{SN}+\frac{m}{2}\overrightarrow{SM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$.

Mặt ta có A, M, K, N đồng phẳng nên

$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow m+n=3$.

Vậy $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm K, E, F. Các mặt phẳng $(BCF), (CDK), (BDE)$ cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt (KEF) tại N và cắt mặt phẳng (BCD) tại P. Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

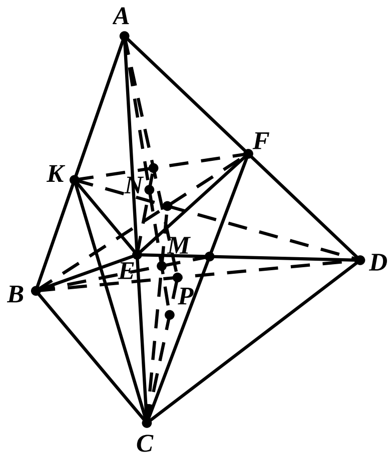
Lời giải.

- Chỉ ra sự tồn tại của điểm M.

Gọi $I=CF\cap BK \Rightarrow CI=(BCF)\cap(CDK)$

Gọi $J=DE\cap CF \Rightarrow (BCF)\cap(BDE)=BJ$

Khi đó $M=CI\cap BJ$ chính là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCF),(CDK),(BDE)$.



- Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}=\beta\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}=\gamma\overrightarrow{AF}$

Do M, N thuộc đoạn AP nên tồn tại các số $m, n>1$ sao cho $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AN}$.

Ta có B, C, D, P đồng phẳng nên tồn tại x, y, z với $x+y+z=1$ (1) sao cho $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$

$=\alpha x\overrightarrow{AK}+\beta y\overrightarrow{AE}+\gamma z\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{\alpha x}{n}\overrightarrow{AK}+\frac{\beta y}{n}\overrightarrow{AE}+\frac{\gamma z}{n}\overrightarrow{AF}$

Mặt khác $N\in(KEF)$ nên $\frac{\alpha x}{n}+\frac{\beta y}{n}+\frac{\gamma z}{n}=1\Leftrightarrow\alpha x+\beta y+\gamma z=n\quad(2)$.

Làm tương tự ta có

$M\in(BCE)\Rightarrow x+y+\gamma z=m\quad(3)$

$M\in(CDK)\Rightarrow x+\beta y+\gamma z=m\quad(4)$

$M\in(BDE)\Rightarrow\alpha x+y+z=m\quad(5)$

Từ $(3),(4),(5)$ suy ra $2(x+y+z)+\alpha x+\beta y+\gamma z=3m$

Kết hợp với $(1),(2)$ ta được $2+n=3m\Leftrightarrow 2+\frac{AP}{AN}=3\frac{AP}{AM}\Leftrightarrow 3+\frac{NP}{NA}=3\left(1+\frac{MP}{MA}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.(đpcm)

Ví dụ 4. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n\ (n\geq 2)$ nằm trong (P) và S là một điểm nằm ngoài (P). Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1,SA_2,...,SA_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tại các điểm $B_1,B_2,..,B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SB_2}{SB_2}+...+\frac{SA_n}{SB_n}=a$ ($a>0$ cho trước)

Chứng minh (α) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Trên các canh SA_i lấy các điểm $X_i\ (i=1,2,..n)$ sao cho $SX_i=\frac{SA_i}{a}$

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SX_1}+\overrightarrow{SX_2}+...+\overrightarrow{SX_n}$ thì I là điểm cố định (do các điểm S và $X_1,X_2,..,X_n$ ccos định)

Ta có $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SX_1}+\overrightarrow{SX_2}+...+\overrightarrow{SX_n}=\frac{SX_1}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\frac{SX_2}{SB_2}\overrightarrow{SB_2}+...+\frac{SX_n}{SB_n}\overrightarrow{SB_n}$

Do $\frac{SX_1}{SB_1}+\frac{SX_2}{SB_2}+...\frac{SX_n}{SB_n}=\frac{SA_1}{aSB_1}+\frac{SA_2}{aSB_2}+...+\frac{SA_n}{aSB_n}=1$ nên các điểm $I,B_1,B_2,...,B_n$ đồng phẳng suy ra mặt phẳng (α) đi qua điểm I cố định.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ còn P,Q,R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA}=l\overrightarrow{PD},\overrightarrow{QE}=l\overrightarrow{QF},\overrightarrow{RB}=l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.

a) Chứng minh $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

c) Xác định vị trí của M để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M,N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN // BD'$. Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $B'A'D'=60^0, B'A'A=D'A'A=120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.

b) Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA'.

5. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC được tính theo công thức $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc AB,BC,CD,DA sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP}=k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để M,N,P,Q đồng phẳng.

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $ASB=BSC=CSA=\alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB,SC.

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

8. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',G'.

Chứng minh $\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SC}{SC'}=3\dfrac{SG}{SG'}$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D'.

Chứng minh $\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}=\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}$.

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}$.

11. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM,BM,CM,DM cắt các mặt $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ lần lượt tại A',B',C',D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt

$A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1.Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

12. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$

Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt) . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2}.$$

13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi

$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}(k \ne 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$.

Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

15. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$.

Chứng minh S, I, J thẳng hàng và $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$.