CHUYÊN ĐỀ IV : ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀ VECTƠ VÀO GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ

1. Một số kiến thức cơ bản thường dùng.

a) Các kiến thức của chương phương pháp tọa độ trong mặt phẳng: phương trình đường thẳng, đường tròn, elip, ...

b) Một số bất đẳng thức vectơ.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các véc tơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2)$ khi đó ta có

+ $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

+ $\left|\vec{u} - \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

+ $\left|\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right|\right| \le \left|\vec{u} - \vec{v}\right| \Leftrightarrow \left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| \le \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

+ $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow x_1.x_2 + y_1.y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

+ $\vec{u}.\vec{v} \ge -\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow x_1.x_2 + y_1.y_2 \ge -\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

Chú ý: - Nếu $x_2 \ne 0,\ y_2 \ne 0$ thì

+ Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k \ge 0$

+ Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k \le 0$

- Bất đẳng thức đầu có thể mở rộng lên n vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ khi đó

$$\left|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+...+\overrightarrow{u_n}\right|\le\left|\overrightarrow{u_1}\right|+\left|\overrightarrow{u_2}\right|+...+\left|\overrightarrow{u_n}\right|$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_n}$ cùng hướng.

2. Phương pháp giải.

- Khi gặp các bài toán đại số mà mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, ... có thể biểu diễn dưới dạng $\sqrt{A}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\sqrt{B}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ ... ta thiết lập các điểm, vectơ có tọa độ thích hợp sao cho độ dài các đoạn thẳng, vectơ đó tương ứng bằng $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, ... rồi sử dụng các bất đẳng thức hình học cơ bản (bất đẳng về độ dài các cạnh tam giác, bất đẳng thức về độ dài đường gấp khúc, ...) và các kiến thức trên để giải quyết bài toán.
- Khi gặp các bài toán đại số mà biểu thức có dạng $ax+by+c=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ... thì ta chuyển bài toán đại số sang bài toán hình học được xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

3. Các ví dụ.

a) Ứng dụng trong giải phương trình, bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$.

b) $\left|\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2-2x+2}\right|=\sqrt{13}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định : $x\ge 0$.

Đặt $\vec{u}\left(2\sqrt{2};\sqrt{x+1}\right)$, $\vec{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}};\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}$

và $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{8+x+1}.\sqrt{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}}=\sqrt{x+9}$

Do đó $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\Rightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$ (tmdk)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1}{7}$.

b) $pt \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+2)^2+9}-\sqrt{(x-1)^2+1}\right|=\sqrt{13}$

Đặt $\vec{u}\,(x+2;3)$, $\vec{v}\,(x-1;1)$

Ta có $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{13}$, $\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|=\sqrt{(x+2)^2+9}-\sqrt{(x-1)^2+1}$

Do đó $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|=\left|\vec{u}-\vec{v}\right| \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng (*)

Ta có $x=1$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x\neq 1$ khi đó (*) $\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{1} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{5}{2}$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau

$\sqrt{x^2-2x+2}\geq\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+2x+1}$

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+1}\geq\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+(x+1)^2}$ (*)

Trong mặt phẳng Oxy xét các vectơ $\vec{u}\,(x;x+1)$, $\vec{v}\,(1;x)$ khi đó ta có

$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{(x-1)^2+1}$, $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2x^2+2x+1}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x^2+1}$

Do đó (*) trở thành $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$

Mặt khác ta luôn có $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\leq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$

suy ra $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$ hay $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng

Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $x\neq 0$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng khi và chỉ khi

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{x+1}{x}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x=0$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Ứng dụng trong giải hệ phương trình, hệ bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases} x(y-1)+yz=0 \\ x(2z-3)+y(x-z)=0 \\ (2z-3)^2+(x-z)^2=(y-1)^2+z^2 \end{cases}$

Lời giải

Xét $\vec{u}(x;y), \vec{v}(y-1;z), \vec{w}(2z-3;x-z)$.

Từ hệ suy ra $\vec{u}.\vec{v}=0\,(1)$, $\vec{u}.\vec{w}=0\,(2)$, $\vec{v}^2=\vec{w}^2$ (3)

* TH1: Nếu $\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow x=y=0$ thay vào hệ suy ra $z=1$ hoặc $z=2$.

* TH2: Nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ từ (1) và (2) suy ra $\vec{v},\vec{w}$ cùng phương.

Mặt khác có $\vec{v}^2=\vec{w}^2$ nên ta suy ra $\vec{v}=\pm\vec{w}$.

\+ Với $\vec{v}=\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=2z-3 \\ z=x-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z-2 \\ x=2z \end{cases}$

Thay x, y vào phương trình đầu ta được

$2z(2z-3)+(2z-2)z=0 \Leftrightarrow 2z(3z-4)=0 \Leftrightarrow z=0$ hoặc $z=\frac{4}{3}$

Nếu $z=0 \Rightarrow x=0,\ y=-2$, nếu $z=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{3}, y=\frac{2}{3}$

\+ Với $\vec{v}=-\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=3-2z \\ z=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2z \\ x=0 \end{cases}$

Thay x, y vào phương trình đầu ta được $z(4-2z)=0 \Leftrightarrow z=0$ hoặc $z=2$

Nếu $z=0 \Rightarrow y=4$, nếu $z=2 \Rightarrow y=0$

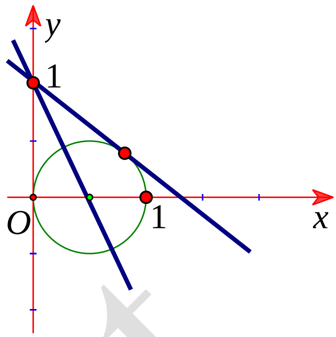
Vậy nghiệm của hệ là: $(0,0,1)$, $(0,0,2)$, $(0,-2,0)$, $(0;4;0)$ và $\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$ (*)

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Giả sử hệ có nghiệm là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$.

Chứng minh rằng $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$



Hình 3.24

Lời giải (hình 3.24)

Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + a(y-1) = 0 & (1) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó phương trình (1) là phương trình đường thẳng Δ ,luôn qua điểm cố định có tọa độ $(0;1)$. Phương trình (2) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R = \dfrac{1}{2}$.

a) Ta có số giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C) là số nghiệm của hệ phương trình.

Vậy để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = \frac{\left|\frac{1}{2} + m.0 - m\right|}{\sqrt{1+m^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$$

b) Ta có $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là 2 nghiệm của hệ suy ra đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$

Ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Mặt khác ta có $AB \le 2R = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

Vậy $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$

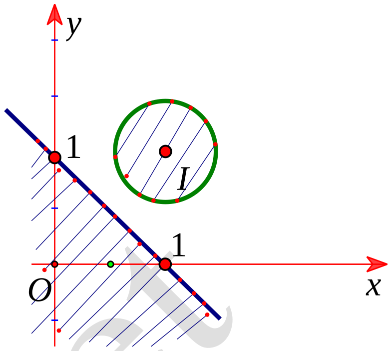
Ví dụ 5: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 \\ x+y \leq 1 \end{cases} \quad *$$

Lời giải (hình 3.25)

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy+m} \geq 1-x-y \\ x+y \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq \ 1-x-y \ ^2 \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$



Hình 3.25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq 1+x^2+y^2-2x+2xy-2y \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leq m+1 & 1 \\ x+y \leq 1 & 2 \end{cases}$$

Xét hệ toạ độ trục Oxy . Ta có những điểm $M\ \ x;y$ thỏa mãn (1) là những điểm nằm trên và trong đường tròn tâm $I\ \ 1;1$ bán kính $R=\sqrt{m+1}$ (như hình vẽ) , những điểm $M\ \ x;y$ thỏa mãn (2) là miền gạch chéo và đường thẳng $x+y=1$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $d\ \ I;\Delta\ \ =R$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có

$$\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5} \geq \sqrt{13}$$

Lời giải

Đặt $\vec{u}\ \ x+1;1\ \ ,\vec{v}\ \ 1-x;2$

Khu đó ta có $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \sqrt{13}$ và

$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+5}$

Vì $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ nên $\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+5} \geq \sqrt{13}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2(x+1) = 1-x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 7: Cho hai số thực x, y với $y > -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{y^4}{2}-4y+5} + \sqrt{\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{y^4}{2}+8y^2-4x-12y+9}}{y+1}$

Lời giải

Ta có $\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{1}{2} \geq x^2, \dfrac{y^4}{2}+\dfrac{1}{2} \geq y^2$

$\Rightarrow S \geq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-4y+4} + \sqrt{x^2+9y^2-4x-12y+8}}{y+1}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(3y-2)^2}}{y+1}$

Lấy $\vec{u} = (x; y-2), \vec{v} = (2-x; 2-3y)$ thì

$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2+(2-3y)^2}$

$\geq \sqrt{(x+2-x)^2+(y-2+2-3y)^2} = 4\sqrt{y^2+1}$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki ta có

$4\sqrt{y^2+1} \geq 2\sqrt{2}(y+1)$ suy ra $S \geq 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Vậy $\min S = 2\sqrt{2}$

Ví dụ 8: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2 = 4$ và $c+d = 4$.

Chứng minh rằng: $ac+cd+db \leq 4+4\sqrt{2}$

Lời giải (hình 3.26)

Ta có $ac + cd + db \le 4 + 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge a^2 + b^2 + (c+d)^2 - 8 - 8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge 12 - 8\sqrt{2}$

Trong hệ trục tọa độ Oxy xét $M(a;b)$, $N(c;d)$

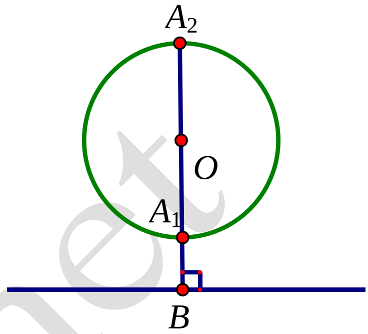
khi đó M, N lần lượt nằm trên đường tròn

$(C): x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng

$\Delta: x + y = 4$.

Khi đó $MN^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

Ta có (C) có tâm O bán kính $R = 2$ và không cắt Δ



Hình 3.26

Đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ có phương trình là $d: x - y = 0$.

Tọa độ giao điểm B của đường thẳng Δ và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2;2)$$

Tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và đường tròn (C) là nghiệm của

hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Suy ra đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm

$A_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $A_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Do đó $A_1B = \sqrt{2(2-\sqrt{2})^2} < A_2B = \sqrt{2(2+\sqrt{2})^2}$

Ta có $MN \ge \min\{A_1B; A_2B\} \Rightarrow MN^2 \ge A_1B^2 = 12 - 8\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A_1$ hay $a = b = \sqrt{2}$ và $N \equiv B$ hay $c = d = 2$ đpcm.

Ví dụ 9: Cho x, y là hai số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3x^2 + 3(y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+3)^2}$$

Lời giải

Ta có

$$P=\sqrt{3}\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y+3)^2}$$

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Gọi $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(\sqrt{3};-3)$ và $M(x;y)$

khi đó $P=\sqrt{3}MA+MB+2MC$

Dễ thấy $\widehat{BOC}=120^0, \widehat{COA}=150^0, \widehat{AOB}=90^0$

Đặt $\vec{u}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}+\frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}+\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}$

Ta có

$$\vec{u}.\overrightarrow{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}.OA+\frac{1}{2}.OA.\cos 90^0+OA.\cos 150^0=OA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 150^0\right)=0$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}.OB.\cos 90^0+\frac{1}{2}.OB+OB.\cos 120^0=OB\left(\frac{1}{2}+\cos 120^0\right)=0$$

Suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}+\frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}+\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}=\vec{0}$

Ta có

$$P=\sqrt{3}\frac{MA.OA}{OA}+\frac{MB.OB}{OB}+2\frac{MC.OC}{OC}\geq\sqrt{3}\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{OA}+\frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OB}}{OB}+2\frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OC}}{OC}$$

Mặt khác $\sqrt{3}\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{OA}+\frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OB}}{OB}+2\frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OC}}{OC}$

$$=\overrightarrow{MO}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}+\frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}+\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}\right)+\sqrt{3}.OA+OB+2OC$$

$$=\sqrt{3}.OA+OB+2OC=\sqrt{3}+1+2.\sqrt{3+9}=5\sqrt{3}+1$$

Suy ra $P\geq 1+5\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi $M\equiv O$ hay $x=y=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1+5\sqrt{3}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.191: Giải phương trình $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$

Bài 3.192: Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$$

Bài 3.193: Giải phương trình

$$\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right| = x^2+5x+\frac{45}{5}$$

Bài 3.194: Giải bất phương trình

$$\sqrt{x-1}+x-3 \geq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$$

Bài 3.195: Giải hệ $\begin{cases} x^2+y^2=-y\ \ x+z \\ x^2+x+y=-2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}$

Bài 3.196. Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z).$$

Bài 3.197: Cho $a,b,c,d \in R$. Có $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ và $ac+bd=0$. Tính $ab+cd$.

Bài 3.198: Giả sử hệ $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=16 \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng $xy+yz+zx \leq 8$.

Bài 3.199: Cho $2x-y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Bài 3.200: Cho x, y là hai số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y$$

Bài 3.201: Chứng minh rằng nếu $a>c>0$ và $b>c>0$ thì

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Bài 3.202: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$P=2x-y+2011$ biết x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Bài 3.203: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2=1$ và $c-d=3$.

Chứng minh rằng $ac+bd-cd \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$

Bài 3.204: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=2x-y$ với x, y thỏa mãn điều kiện

$x^2+y^2=5$

Bài 3.205: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x+y$ với x, y thỏa mãn điều kiện $(x-2)^2+8(y+3)^2=8$

Bài 3.206: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2$ với x, y thỏa mãn điều kiện $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

Bài 3.207: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=c^2+d^2-2ac-2bd+1$.Với a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2=1$, $c^2-d+3=0$.

Bài 3.208: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2\geq 25\\ x^2+(y-4)^2\leq 25\\ -2x+y\leq 4\\ x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất lớn nhất của $P=x-y$.

Bài 3.209: Tìm a để phương trình sau có 2 nghiệm $\sqrt{x-x^2}=a-x$ (*)

Bài 3.210: Cho tám số thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong sáu số :

$x_1x_3+x_2x_4;\ x_1x_5+x_2x_6;\ x_1x_7+x_2x_8;\ x_3x_5+x_4x_6;\ x_3x_7+x_4x_8;\ x_5x_7+x_6x_8$

không âm.

Bài 3.211: Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(a+b)$ và $c^2+d^2+36=12(c+d)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

Bài 3.212: Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2=c^2+d^2=5$.

Chứng minh rằng $\sqrt{5-a-2b}+\sqrt{5-c-2d}+\sqrt{5-ac-bd}\leq\dfrac{3\sqrt{30}}{2}$

Bài 3.213: Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\left|\dfrac{bc-ad}{ac+bc}\right|=\sqrt{3}$.

Chứng minh rằng $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\geq\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)$.