PHÉP VỊ TỰ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm I và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k. Kí hiệu $V_{(I;k)}$

Vậy $V_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.

2. Biểu thức tọa độ.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $I(x_0;y_0)$, $M(x;y)$, gọi $M'(x';y') = V_{(I;k)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}.$$

3. Tính chất:

- Nếu $V_{(I;k)}(M) = M', V_{(I;k)}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$
- Phép vị tự tỉ số k

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$

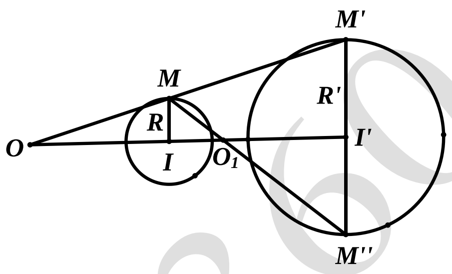
4. Tâm vị tự của hai đường tròn.

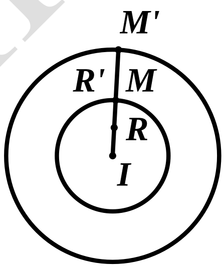
Định lí: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

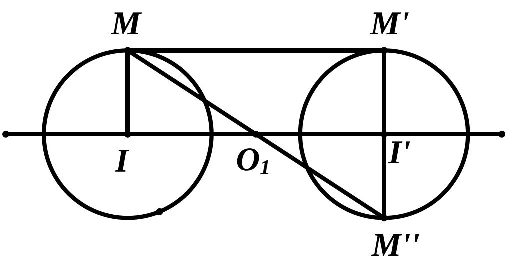
Cho hai đường tròn $\left(I;R\right)$ và $\left(I';R'\right)$

- Nếu $I\equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I;\pm\frac{R'}{R}\right)}$ biến $\left(I;R\right)$ thành $\left(I';R'\right)$.
- Nếu $I\ne I'$ và $R\ne R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O;\frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O_1;-\frac{R'}{R}\right)}$ biến $\left(I;R\right)$ thành $\left(I';R'\right)$. Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn.





- Nếu Nếu $I\ne I'$ và $R=R'$ thì có $V_{\left(O_1;-1\right)}$ biến $\left(I;R\right)$ thành $\left(I';R'\right)$.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ.

Phương pháp:

Dùng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép vị tự.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x+2y-7=0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

Lời giải.

***Cách 1*:** Lấy $M(x;y)\in d \Rightarrow 5x+2y-7=0\ (*)$.

Gọi $M'(x';y')=V_{(O;-2)}(M)$. Theo biểu thức tọa độ ta có

$$\begin{cases} x'=-2x+[1-(-2)].0 \\ y'=-2y+[1-(-2)].0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}x' \\ y=-\frac{1}{2}y' \end{cases}.$$

Thay vào $(*)$ ta được $-\frac{5}{2}x'-y'-7=0 \Leftrightarrow 5x'+2y'+14=0$

Vậy $d': 5x+2y+14=0$.

***Cách 2*:** Do d' song song hoặc trùng với d nên phương trình có dạng : $5x+2y+c=0$. Lấy $M(1;1)$ thuộc d. Gọi $M'(x';y')=V_{(O;-2)}(M)$ ta có $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=-2 \end{cases}$. Thay vào $(*)$ ta được $c=14$.

Vậy $d': 5x+2y+14=0$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số $k=3$

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $J(1;1)$, bán kính $R=2$.

Gọi $J'(x';y')=V_{(I;3)}(J)\Rightarrow \overrightarrow{IJ'}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=3(1+1) \\ y'-1=3(1-2) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x'=7 \\ y'=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow J'(7;-2)$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự $V_{(I;3)}$ thì (C') có tâm $J'(7;-2)$, bán kính $R'=3R=6$.

Vậy $(C'):(x-7)^2+(y+2)^2=36$.

Bài toán 02: TÌM TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

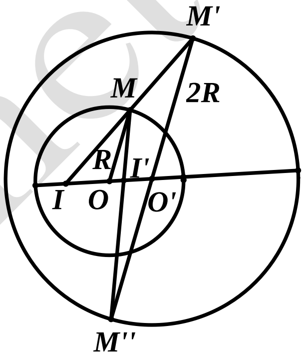
Phương pháp:

Sử dụng cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong bài học.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';2R)$ đựng nhau, với $O \neq O'$. Tìm tâm vị tự của hai đương tròn (O) và (O').

Lời giải.



Do $O \neq O'$ và $R \neq 2R$ nên có hai phép vị tự $V_{(I;2)}$ và $V_{(I';-2)}$ biến $(O;R)$ thành $(O';2R)$.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=4$ và $(C'):(x-8)^2+(y-4)^2=16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$,bán kính $R=2$; đường tròn (C') có tâm $I'(8;4)$, bán kính $R'=4$. Do $I \neq I'$ và $R \neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(J';-2)}$ biến (C) thành (C'). Gọi $J(x;y)$

Với $k=2$ khi đó $\overrightarrow{JI'}=2\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=2(2-x) \\ 4-y=2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$.

$\Rightarrow J(-4;-2)$.

Tương tự với $k=-2$, tính được $J'(4;2)$.

Bài toán 03: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

Để dựng một hình (H) nào đó ta quy về dựng một số điểm (đủ để xác định hình (H)) khi đó ta xem các điểm cần dựng đó là giao của hai đường trong đố một đường có sẵn và một đường là ảnh vị tự của một đường khác.

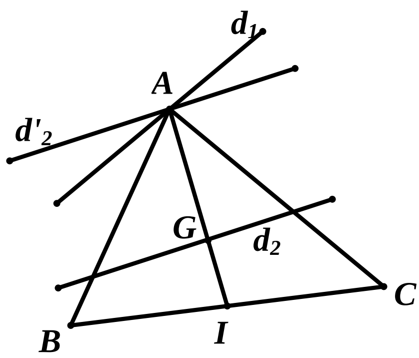
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai điểm B,C cố định và hai đường thẳng d_1,d_2. Dựng tam giác ABC có đỉnh A thuộc d_1 và trọng tâm G thuộc d_2.

Lời giải.

Phân tích:

Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Gọi I là trung điểm của BC, theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow V_{(I;3)}(G)=A$ mà $G\in d_2\Rightarrow A\in d_2'$

Với d_2' là ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$.

Lại có $A\in d_1\Rightarrow A=d_1\cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$.
- Dựng giao điểm $A=d_1\cap d_2'$.
- Dựng giao điểm $G=IA\cap d_2$.

Hai điểm $A;G$ là hai điểm cần dựng.

Chứng minh:

Rõ ràng từ cách dựng ta có $A \in d_1, G \in d_2$; I là trung điểm của BC và $V_{(I;3)}(G) = A \Rightarrow \overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Biện luận:

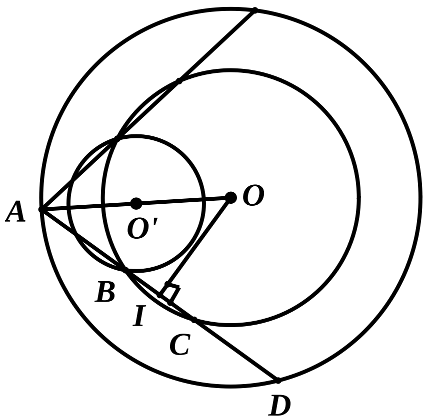
Số nghiệm hình bằng số giao điểm của d_1 và d_2'.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn đồng tâm (C_1) và (C_2). Từ một điểm A trên đường tròn lớn (C_1) hãy dựng đường thẳng d cắt (C_2) tại B, C và cắt (C_1) tại D sao cho $AB = BC = CD$.

Lời giải.

Phân tích:

Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (C_1) tại D và (C_2) tại B, C sao cho $AB = BC = CD$, khi đó $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C) = B$.



Mà $C \in (C_2)$ nên $B \in (C_2')$ với đường tròn

(C_2') là ảnh của (C_2) qua $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$.

Lại có $B \in (C_2)$ nên $B \in (C_2) \cap (C_2')$.

Cách dựng

- Dựng đường tròn (C_2') ảnh của đường tròn (C_2) qua phép vị tự $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$.

- Dựng giao điểm B của (C_2) và (C_2').
- Dựng đường thẳng d đi qua A,B cắt các đường tròn $(C_2),(C_1)$ tại C,D tương ứng.

Đường thẳng d chính là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi I là trung điểm của AD thì I cũng là trung điểm của BC.

Vì $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C)=B$ nên $AB=BC$, mặt khác AD và BC có chung trung điểm I nên $IA=ID, IC=IC, ID=CD+IC; IA=IB+AB$ suy ra $CD=AB$. Vậy $AB=BC=CD$.

Biện luận: Gọi $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính các đường tròn (C_1) và (C_2) ta có:

- Nếu $R_1 \geq 2R_2$ thì có một nghiệm hình.
- Nếu $R_1 < 2R_2$ thì có hai nghiệm hình.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

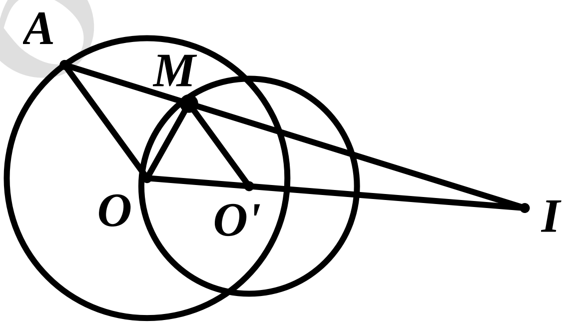
Để tìm tập hợp điểm M ta có thể quy về tìm tập hợp điểm N và tìm một phép vị tự $V_{(I;k)}$ nào đó sao cho $V_{(I;k)}(N)=M$ suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của quỹ tích N qua $V_{(I;k)}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I nằm ngoài đường tròn sao cho $OI=3R$, A là một điểm thay đổi trên đường tròn $(O;R)$. Phân giác trong góc IOA cắt IA tại điểm M. Tìm tập hợp điểm M khi A di động trên $(O;R)$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{MI}{MA}=\dfrac{OI}{OA}=\dfrac{3R}{R}=3$



$\Rightarrow IM=\dfrac{3}{4}IA$

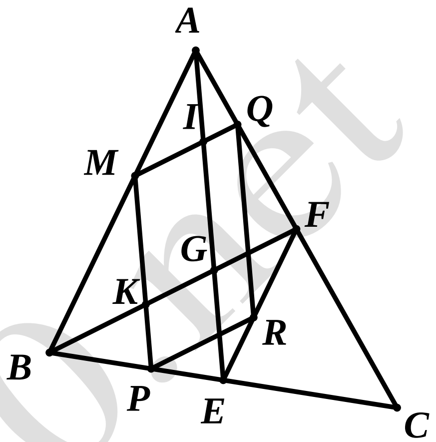
$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}(A)=M$, mà A thuộc đường tròn $(O;R)$ nên M thuộc $\left(O';\dfrac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$. Vậy tập hợp điểm M là $\left(O';\dfrac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Qua điểm M trên cạnh AB vẽ các đường song song với các đường trung tuyến AE và BF, tương ứng cắt BC và CA tai P,Q. Tìm tập hợp điểm R sao cho $MPRQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $I = MQ \cap AE$, $K = MP \cap BF$ và G là trọng tâm của tam giác ABC.



Ta có $\frac{MI}{BG} = \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AF} = \frac{IQ}{GF}$

$\Rightarrow \frac{MI}{IQ} = \frac{BG}{GF} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MR}$ Do đó

$\overrightarrow{GR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}(M) = R$, mà M thuộc cạnh AB nên R thuộc ảnh của cạnh AB qua $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ đoạn chính là đoạn EF.

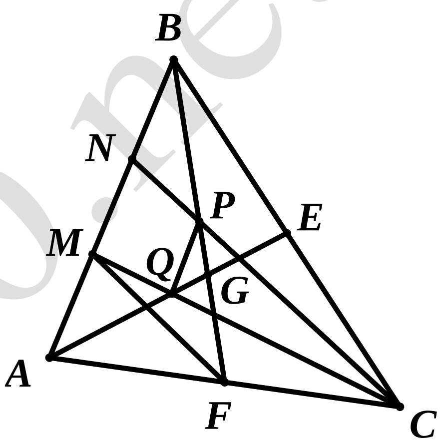
Vậy tập hợp điểm R là đoạn EF.

Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI TOÁN.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm M,N sao cho $AM=MN=NB$, các điểm E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh CB,CA, gọi P là giao điểm của BF và CN, Q là giao điểm của AE với CM. Chứng minh $PQ//AB$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có MF là đường trung bình của tam giác ACN nên $MF // CN$, mặt khác N là trung điểm của MB nên P là trung điểm của BF.

Ta có

$$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}.$$

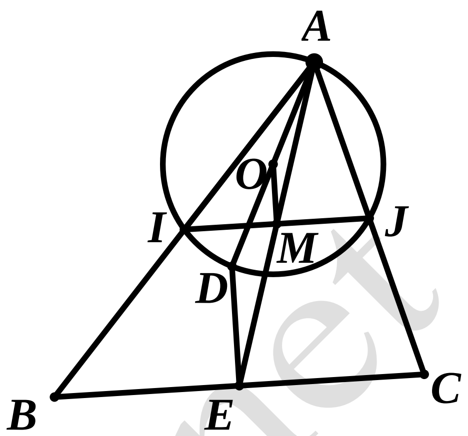
Tương tự $\overrightarrow{GQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

Vậy $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(B)=P$ và $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(A)=Q$ suy ra $PQ//AB$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi I,J,M lần lượt là trung điểm của AB,AC,IJ. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AO tại D. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên BC. Chứng minh A,M,E thẳng hàng.

Lời giải.

Xét phép vị tự $V_{(A;2)}$ ta có



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AJ}$ nên $V_{(A;2)}(I)=B, V_{(A;2)}(J)=C$ do đó $V_{(A;2)}$ biến tam giác AIJ thành tam giác ABC, do đó phép vị tự này biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC.

Do $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}\Rightarrow V_{(A;2)}(O)=D$

$\Rightarrow O'\equiv D$, hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giả sử $V_{(A;2)}(M)=M'$ khi đó $OM\perp IJ\Rightarrow DM'\perp BC\Rightarrow M'\equiv E$.

Vậy $V_{(A;2)}(M)=E$ nên A,M,E thẳng hàng.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

43. Cho đường thẳng $d:2x-y-5=0$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=9$. Tìm ảnh của d và (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k=-2$.

44. Cho tam giác ABC có B,C cố định còn A chạy trên một đường tròn $(O;R)$ cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

45. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

46. Chứng minh rằng nếu thực hiện liên tiếp hai phép vị tự có tỉ số k_1, k_2 với $k_1k_2 \neq 1$ thì ta được một phép vị tự có tỉ số $k = k_1.k_2$.

47. Trong một tam giác chứng minh trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng (*đường thẳng đi qua ba điểm này có tên gọi là đường thẳng ơle).*

48. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh trong tâm các tam giác ABC, CDA, BCD, DAB cùng nằm trên một đường tròn.

49. Cho ba đường tròn $(O_i;R_i)(i=\overline{1,3})$ đôi một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. Dây cung AC kéo dài của (O_1) cắt (O_3) tại A_1; A_1A_2 là đường kính của (O_3). Chứng minh A, B, A_2 thẳng hàng.

50. Cho hai đường tròn có bán kính khác nhau (O_1) và (O_2) nằm ngoài nhau. Xét đường tròn (O) tiếp xúc ngoài đồng thời (O_1) tại A, với (O_2) tại B. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M bất kì $(M \neq A, B)$. Đường thẳng MA cắt (O_1) tại M_1; MB cắt (O_2) tại điểm thứ hai M_2. Chứng minh rằng khi M di động trên (O), thì đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định.