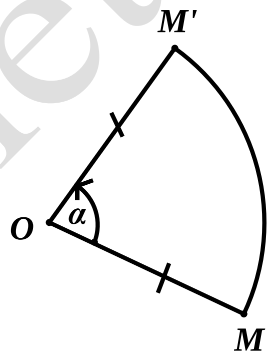
PHÉP QUAY

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM;OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O, α được gọi là góc quay.



Phép quay tâm O góc quay α được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

Nhận xét

- Khi $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đối xứng tâm O.
- Khi $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đồng nhất.

2. Biểu thức tọa độ của phép quay:

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $M(x;y)$ và $M'(x';y') = Q_{(O,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $M(x;y)$, $I(a;b)$ và $M'(x';y') = Q_{(I,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

3. Tính chất của phép quay:

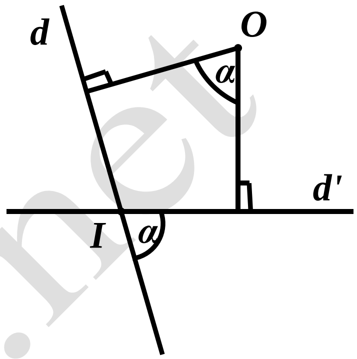
- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

Lưu ý:

Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d', khi đó

Nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng α

Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\pi - \alpha$.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP QUAY.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa , biểu thức tọa độ và các tính chất của phép quay

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho $M(3;4)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 30^0.

Lời giải.

Gọi $M'(x';y') = Q_{(O;30^0)}$. Áp dụng biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} x' = 3\cos 30^0 - 4\sin 30^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \\ y' = 3\sin 30^0 + 4\cos 30^0 = \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2; \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right).$$

Ví dụ 2. Cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I;45^0)}$.

Lời giải.

Lấy hai điểm $M(-2;0); N(1;-2)$ thuộc d.

Gọi $M'(x_1;y_1), N'(x_2;y_2)$ là ảnh của M, N qua $Q_{(I;45^0)}$

Ta có $\begin{cases} x_1 = 2 + (-2-2)\cos 45^0 - (0-1)\sin 45^0 \\ y_1 = 1 + (-2-2)\sin 45^0 + (0-1)\cos 45^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_1 = 1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow M'\left(2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; 1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tương tự

$$\begin{cases} x_2 = 2 + (1-2)\cos 45^0 - (-2-1)\sin 45^0 \\ y_2 = 1 + (1-2)\sin 45^0 + (-2-1)\cos 45^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{2} \\ y_2 = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N'\left(2 + \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(5;1)$.

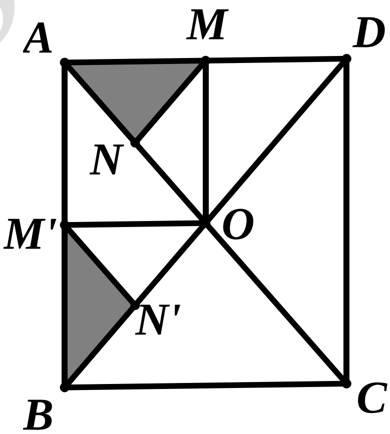
Gọi $d' = Q_{(I;45^0)}(d)$ thì d' có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{M'N'} = (5;1) \Rightarrow$ VTPT $\vec{n} = (-1;5)$

Phương trình:

$d': -\left(x - 2 - \sqrt{2}\right) + 5\left(y - 1 + 2\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -x + 5y - 3 + 10\sqrt{2} = 0$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

Lời giải.



Phép quay $Q_{(O;90^0)}$ biến A thành D, biến M thành M' là trung điểm của AD, biến N thành N' là trung điểm của OD. Do đó nó biến tam giác AMN thành tam giác $DM'N'$.

Bài toán 02: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó.

Các ví dụ

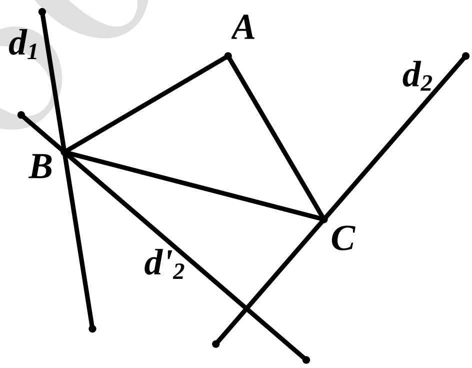
Ví dụ 1. Cho điểm A và hai đường thẳng d_1, d_2. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A sao cho $B \in d_1, C \in d_2$.

Lời giải.

Phân tích:

Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có thể giả sử $(AB, AC) = 90^0$, khi đó $Q_{(A;-90^0)}(C) = B$, mà $C \in d_2$ nên $B \in d_2'$ với $d_2' = Q_{(A;-90^0)}(d_2)$.



Lại có $B \in d_1$ nên $B = d_1 \cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $Q_{(A;-90^0)}$.
- Dựng giao điểm $B = d_1 \cap d_2'$.
- Dựng đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt d_2 tại C.

Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

***Chứng minh*:**

Từ cách dựng suy ra $Q_{(A;90^0)}(B) = C$ nên $AB = AC$ và $BAC = 90^0$ do đó tam giác ABC vuông cân tại A.

Biện luận:

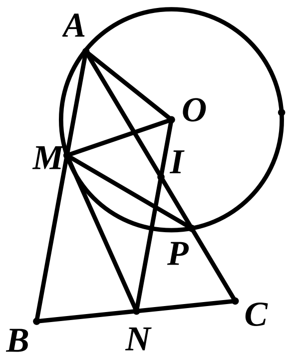
- Nếu d_1, d_2 không vuông góc thì có một nghiệm hình.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi d_1, d_2 thì có vô số nghiệm hình.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A không nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi d_1, d_2 thì bài toán vô nghiệm hình.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $(AB, AC) = \alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$ và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng CB, CA các điểm N, P sao cho $MN = MP$ và đường tròn (AMP) tiếp xúc với MN.

Lời giải.

Phân tích:

Giả sử đã dựng được các điểm N, P sao cho $N \in BC, P \in AC$ sao cho $MN = MP$ và đường tròn (AMP) tiếp xúc với MN. Khi đó do MN tiếp xúc với đường tròn (AMP) nên $PMN = A = \alpha$. Từ đó ta có $(MP;MN) = -\alpha$ lại có $MP = MN$ nên $Q_{(M,-\alpha)}(P) = N$.



Giả sử $O = Q_{(M,-\alpha)}(A)$ và $I = ON \cap AC$.

Theo tính chất phép quay ta có $NIC = (ON, AP) = \alpha \Rightarrow NIC = BAC \Rightarrow IN // AB$.

***Cách dựng*:**

- Dựng điểm $O = Q_{(M,-\alpha)}$
- Dựng đường thẳng qua O song song với AB cắt BC tại N
- Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $NMP = \alpha$

Như vây các điểm N, P là các điểm cần dựng.

Chứng minh:

Vì $ON // AB$ nên $AMO = MON = \alpha \Rightarrow PMN = MAP = \alpha$ suy ra đường tròn (AMN) tiếp xúc với MN. Ta có $Q_{(M;-\alpha)} : MP \to MN$ nên $MP = MN$.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

Bài toán 03: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó.

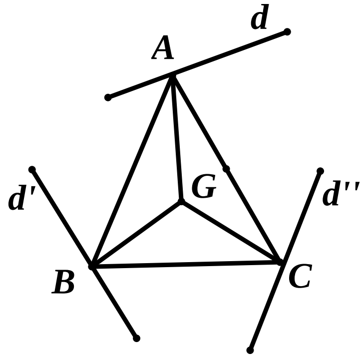
Để tìm tập hợp điểm M' ta đi tìm tập hợp điểm M mà $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó biến điểm M thành điểm M', khi đó nếu $M \in (H)$ thì $M' \in (H') = Q_{(I;\alpha)}((H))$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng d và một điểm G không nằm trên d. Với mỗi điểm A nằm trên d ta dựng tam giác đều ABC có tâm G. Tìm quỹ tích các điểm B, C khi A di động trên d.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều và có tâm G nên phép quay tâm G góc quay 120^0 biến A thành B hoặc C và phép quay tâm G góc quay 240^0 biến A thành B hoặc C. Mà $A \in d$ nên B, C thuộc các đường thẳng là ảnh của d trong hai phép quay nói trên.



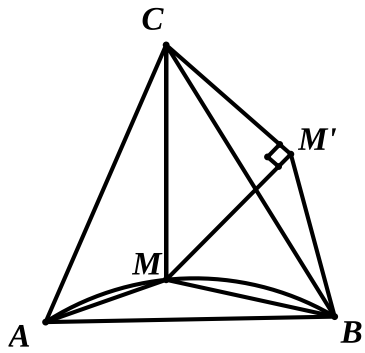
Vậy quỹ tích các điểm B, C là các đường thẳng ảnh của d trong hai phép quay tâm G góc quay 120^0 và 240^0.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp điểm M mằn trong tam giác ABC sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Lời giải.

Xét phép quay $Q_{\left(B;-60^0\right)}$ thì A biến thành C, giả sử điểm M biến thành M', khi đó $MA = M'C, MB = MM'$ nên

$MA^2 + MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow M'C^2 + MM'^2 = MC^2$ do đó tam giác $M'MC$ vuông tại M' suy ra $BM'C = 150^0$.



Lại có $AM = CM'$, $BM = BM'$ và $AB = BC \Rightarrow$ $\Delta AMB = \Delta CM'B$ $(c-c-c)$

$\Rightarrow AMB = CM'B = 150^0$. Vậy M thuộc cung chứa góc 150^0 với dây cung AB nằm trong tam giác ABC.

Đảo lại lấy điểm M thuộc cung $AB = 150^0$ trong tam giác ABC, gọi $M' = Q_{\left(B;-60^0\right)}(M)$.

Do $Q_{\left(B;-60^0\right)}: AMB \to CM'B$ nên $CM'B = 150^0$. Mặt khác tam giác BMM' đều nên $BM'M = 60^0 \Rightarrow CM'M = 150^0 - 60^0 = 90^0$ vì vậy $\Delta M'MC$ vuông tại $M' \Rightarrow M'B^2 + M'C^2 = MC^2$, mà $MA = M'C, MB = MM' \Rightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2$.

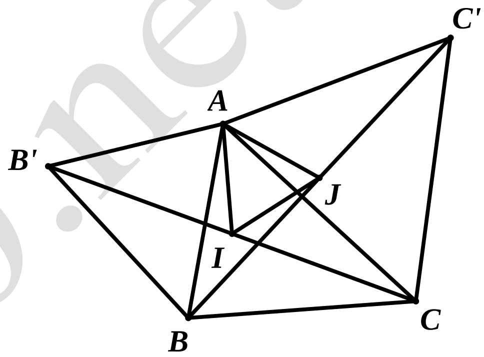
Vậy tập hợp điểm M thỏa yêu cầu bài toán là cung $AB = 150^0$ trong tam giác ABC nhận AB làm dây cung.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI TOÁN.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Vẽ các tam giác đều ABB' và ACC' nằm phía ngoài tam giác ABC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CB' và BC'. Chứng minh các điểm A, I, J hoặc trùng nhau hoặc tạo thành một tam giác đều.

Lời giải.



Giả sử góc lượng giác $(AB, AC) > 0$ (hình vẽ).

Khi đó , xét phép quay $Q_{(A;60^0)}$ .Ta có

$Q_{(A;60^0)}: B' \mapsto B, C \mapsto C'$ $Q_{(A;60^0)}: B'C \mapsto BC'$

mà I, J lần lượt là trung điểm của $B'C$ và BC' nên $Q_{(A;60^0)}(I) = J$.

Vậy nếu I, J không trùng A thì ΔAIJ đều.

Khi $BAC = 120^0$ thì $I \equiv J \equiv A$.

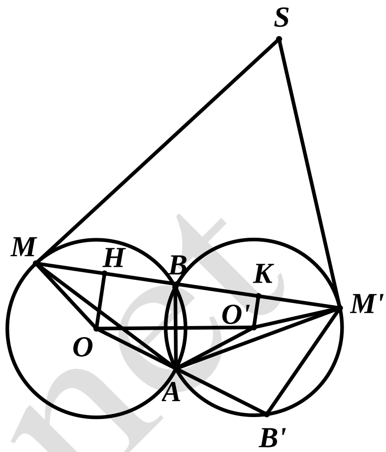
Ví dụ 2. Cho hai đường trong bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho $OAO' = 120^0$. Đường thẳng d đi qua B cắt hai đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại M, M' sao cho M nằm ngoài (O') còn M' nằm ngoài (O). Gọi S là giao điểm của các tiếp tuyến với hai đường tròn tại M và M'. Xác định vị trí của M, M' sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SMM' lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử góc lượng giác $(AO', AO) = 120^0$ (như hình vẽ)

Xét phép quay $Q_{\left(A;-120^0\right)}$. Gọi $B'=Q_{\left(A;-120^0\right)}\left(B\right)$ thì

$BAB'=120^0$. Dễ thấy $OAB=60^0$ suy ra $OAB+BAB'=180^0$ nên O,A,B' thẳng hàng.



Ta có $MBA+ABM'=180^0$,
$ABM'+AB'M'=180^0 \Rightarrow MBA=AB'M'$.

Mà $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R'\right)$ bằng nhau nên
$AM=AM'$ $\left(1\right)$; từ đó ta có $\Delta OAM=\Delta O'AM'$

$\Rightarrow OAM=O'AM'$

$\Rightarrow O'AM+O'AM=OAM+O'AM=120^0$

hay $MAM'=120^0$ $\left(2\right)$. Từ $\left(1\right);\left(2\right)$ suy ra $Q_{\left(A;-120^0\right)}\left(M\right)=M'$. Do đó trong phép quay này tiếp tuyến MS biến thành tiếp tuyến $M'S$ nên góc tù giữa hai đường thẳng MS và $M'S$ bằng 120^0 do đó $MSM'=60^0$. Áp dụng định lí sin cho tam giác SMM' ta có $R=\dfrac{MM'}{2\sin 60^0}=\dfrac{MM'}{\sqrt{3}}\Rightarrow R$ lớn nhất khi MM' lớn nhất.Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của O,O' trên MM' thì ta có
$MM'=2HK\le 2OO'$. Đẳng thức xảy ra khi $MM'//OO'$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SMM' lớn nhất khi M,M' là các giao điểm thứ hai của đường thẳng d đi qua B và song song với OO' với hai đường tròn.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

28. Tìm ảnh của đường thẳng $d:5x-3y+15=0$ qua phép quay $Q_{\left(O;90^0\right)}$.

29. Tìm ảnh của đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=9$ qua phép quay $Q_{\left(I;90^0\right)}$ với $I\left(3;4\right)$.

30. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1;2), B(3;4)$ và $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

31. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

a) Chứng minh $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^0.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AF và EC, chứng minh tam giác BMN đều.

32.

a) Cho tam giác ABC có tất cả các góc nhỏ hơn 120^0. Tìm trên mặt phẳng chứa tam giác điểm M sao cho tổng $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$T = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$

33. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Về phía ngoài tam giác dựng 4 hình vuông $ABMN, CBPQ, CDPS, DATU$. Gọi $O_i \left(i = \overline{1,4}\right)$ theo thứ tự là tâm của các hình vuông đó. Chứng minh $O_1O_2 \perp O_2O_4$ và $O_1O_2 = O_2O_4$.

34. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Trên các cạnh BC, CD lấy các điểm M, N. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên các đường thẳng AM, AN; các điểm I, J lần lượt là hình chiếu của D lên AM, AN. Chứng minh

a) Xác định ảnh của ΔBAF và ΔBAE qua $Q_{(O,90^0)}$.

b) $EF \perp IJ$.

35. Cho góc xOy và điểm M thuộc miền trong góc đó. Tìm trên Ox, Oy các điểm A, B sao cho $OA = OB$ và $MA + MB$ nhỏ nhất.

36. Cho hai đường tròn đồng tâm, hãy dựng hình vuông sao cho hai đỉnh liên tiếp của nó nằm trên một đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn thứ hai.