PHÉP NGHỊCH ĐẢO

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M khác O thành điểm sao cho M' thuộc đường thẳng OM và $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ được gọi là phép nghịch đảo cực O, phương tích k.

Kí hiệu phép nghịch đảo cực O, phương tích k là f_O^k.

Vậy $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in OM \\ \overline{OM'}.\overline{OM} = k \end{cases}$.

Khi M tiến lại gần cực nghịch đảo O thì M' tiến càng ra xa O, nghĩa là $M \to O$ thì $f_O^k(M) = M' \to \infty$.

2. Tính chất.

Tính chất 1.

Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp, tức $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow f_O^k(M') = M$. (trong chuyên đề này ta dùng kí hiệu f thay cho f_O^k nếu không gây hiểu nhầm)

Tính chất 1 là hiển nhiên vì $f(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = k$

$\Leftrightarrow \overline{OM'}.\overline{OM} = k \Leftrightarrow f(M') = M$.

Từ tính chất trên ta có $f^2(M) = f \circ f(M) = f(M') = M \Rightarrow f^2$ là phép đồng nhất.

Nếu $f(M) = M$ thì M được gọi là điểm kép của f.

Tính chất 2.

Nếu $k < 0$ thì hiển nhiên f không có điểm kép .

Nếu $k > 0$ thì tập hợp các điểm kép của f là đường tròn $(O;\sqrt{k})$. Đường tròn này được gọi là đường tròn nghịch đảo của f.

Thật vậy, $f(M) = M \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM} = k > 0 \Leftrightarrow OM = \sqrt{k} \Leftrightarrow M \in (O;\sqrt{k})$.

Từ định nghĩa ta thấy ảnh của mọi điểm M thuộc đường thẳng d đi qua cực O là một điểm M' thuộc d vì vậy $f(d) = d$ và ta nói d là đường thẳng kép của f.

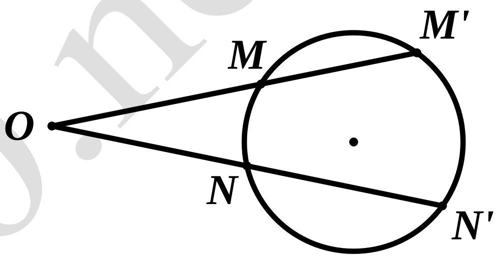
Nếu hai đường tròn (C) và (C') có chung điểm A thì góc giữa hai tiếp tuyến của (C) và (C') cắt nhau tại A,B. Gọi d,d' lần lượt là tiếp tuyến của

(C) và (C') tại A. Góc giữa hai đường thẳng d và d' được gọi là góc giữa (C) và (C'). Nếu góc giữa hai tiếp tuyến d và d' bằng 90^0 thì ta nói (C) và (C') là hai đường tròn trực giao.

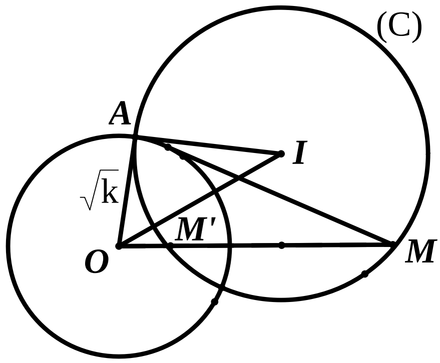
Tính chất 3.

- Nếu $f(M)=M'$ thì mọi đượng tròn đi qua M và M' đều là đường tròn bất biến, nghĩa là $f(C)=C$.
- Nếu $P_{O/(C)}=k$ thì (C) bất biến qua f.
- Nếu đường tròn (C) trực giao với đường tròn $(O,\sqrt{k})$ thì (C) bất biến qua f.

Chứng minh:



- Giả sử $f(M)=M'$ và (C) là đường tròn đi qua M,M'.
  Lấy điểm N bất kì thuộc (C), gọi N' là giao điểm của ON với (C).
  Ta có $\overline{ON}.\overline{ON'}=\overline{OM}.\overline{OM'}=k$
  $\Rightarrow f(N)=N' \Rightarrow (C)$ bất biến.
- $P_{O/(C)}=k$,Lấy M bất kì thuộc (C), gọi
  $M'=f(M) \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'}=k=P_{O/(C)} \Leftrightarrow M'\in(C)$
  $\Rightarrow (C)$ bất biến.
- Vì (C) và $(O;\sqrt{k})$ trực giao nên
  $P_{O/(C)}=\left(\sqrt{k}\right)^2=k$ do đó (C) bất biến.



Tính chất 4.

- Ảnh của một đường thẳng đi qua cực biến thành chính nó.
- Ảnh của một đường thẳng không đi qua cực biến thành đường tròn đi qua cực.

Chứng minh:

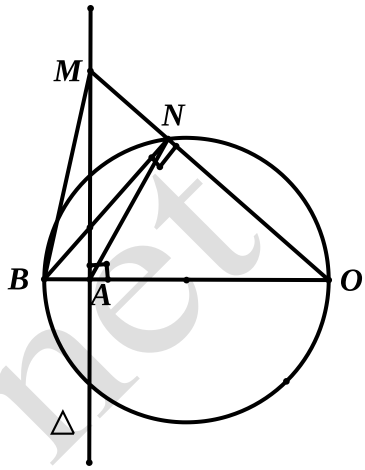
Ý thứ nhất thì hiển nhiên, đã được chúng ta nhắc tới trong phần mọi đường thẳng qua cực đều là đường thẳng kép. Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của ý thứ hai.

Gọi A là hình chiếu của O trên Δ, gọi $B = f(A)$.

Lấy điểm $M \in \Delta$, giả sử $N = f(M)$ thì ta có

$\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OM}.\overline{ON} = k \Rightarrow A, B, M, N$ cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow BNM = BAM = 90^0$ hay N thuộc đường tròn đường kính OB. Khi M chạy trên Δ thì N chạy trên đường tròn đường kính OB. Vậy ảnh của Δ là đường tròn đường kính OB.

(hình vẽ bên ứng với trường hợp $k > 0$)



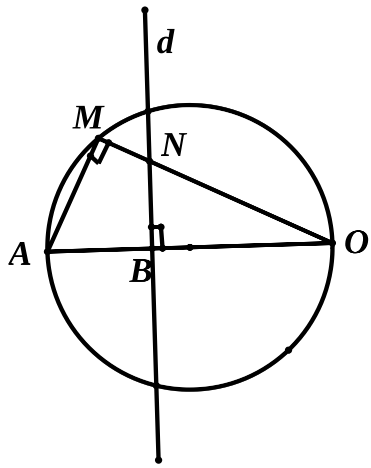
Tính chất 5.

- Ảnh của một đường tròn qua cực là một đường thẳng không qua cực và vuông góc với đường kính xuất phát từ cực của đường tròn đó.
- Ảnh của một đường tròn không qua cực là một đườngtròn.

Chứng minh:

- Giả sử đường tròn (C) đi qua cực và A là điểm đối xứng của O qua tâm đường tròn (C).

  Gọi $B = f(A)$, lấy M bất kì thuộc (C) (dĩ nhiên là $M \neq A$). Gọi $N = f(M)$ khi đó $\overline{OM}.\overline{ON} = k = \overline{OA}.\overline{OB}$ suy ra A, B, M, N cùng nằn trên một đường tròn $\Rightarrow ABN = AMO = 90^0$. Vậy quỹ tích N là đường thẳng đi qua B và vuông góc với OA. Hay ảnh của (C) là đường thẳng d không đi qua O và vuông góc với đường kính của đường tròn xuất phát từ cực O.

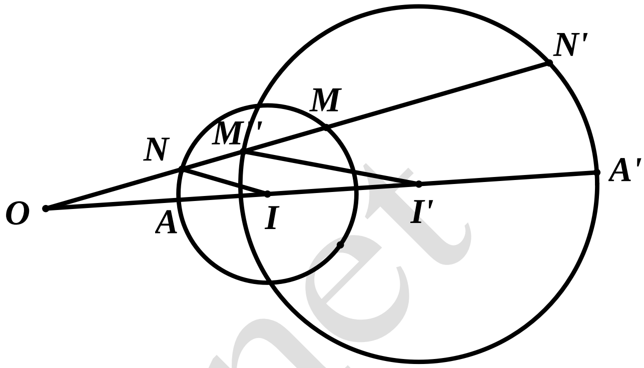


  Gọi (I) là đường tròn không đi qua cực O, M là điểm bất kì của (I). Gọi $N = OM \cap (I)$. Đặt $p = \overline{OM}.\overline{ON}$ thì $p = P_{O/(I)}$ khi đó (I) bất biến qua f_I^p. Gọi $M' = f_O^k$ thì

  $\overline{OM}.\overline{OM'} = k \Rightarrow \dfrac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \dfrac{k}{p}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p}\overrightarrow{ON}$. Vậy M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{k}{p}$.

Đảo lại nếu M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{k}{p}$ thì



$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p}\overrightarrow{ON} \Rightarrow \overline{OM'} = \frac{k}{p}\overline{ON} \Rightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = \frac{k}{p}\overline{ON}.\overline{OM} = k \Rightarrow M'$ là ảnh của M qua phép nghịch đảo f_O^k.

Vậy ảnh của (I) qua phép nghịch đảo là đường tròn (I') -ảnh của (I) trong phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{k}{p} = \frac{k}{P_{O/(I)}}$.

Lưu ý: $f_O^k(I) \neq I'$

Tính chất 6.

Tích của hai phép nghịch đảo cùng cực $f_O^{k_1}$ và $f_O^{k_2}$ là một phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{k_2}{k_1}$.

Chứng minh:

Giả sử $f_O^{k_1} : M \to M_1, f_O^{k_2} : M_1 \to M'$ thì $\overline{OM}.\overline{OM_1} = k_1$ và O, M, M_1 thẳng hàng ; $\overline{OM_1}.\overline{OM'} = k_2$ O, M_1, M' thẳng hàng, suy ra $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1}$ và O, M, M' thẳng hàng, do đó $V_{\left(O,\frac{k_2}{k_1}\right)} : M \to M'$.

Vậy $f_O^{k_2} \circ f_O^{k_1} = V_{\left(O,\frac{k_2}{k_1}\right)}$.

Hệ quả: $V_{(O;k_2)} \circ f_O^{k_1} = f_O^{k_1.k_2}$ (Vì $f_O^{k_2} = V_{\left(O;\frac{k_2}{k_1}\right)} \circ f_O^{k_1}$).

Tính chất 7. Nếu phép nghịch đảo cực O, phương tích k biến A,B thành A',B' tương ứng thì $A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB$.

Chứng minh:

- Nếu A,B với cực O thẳng hàng thì A',B' nằm trên trục OAB và $\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=k \Rightarrow \overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}$
$$=\frac{k}{\overline{OB}}-\frac{k}{\overline{OA}}=\frac{k}{\overline{OA}.\overline{OB}}\left(\overline{OA}-\overline{OB}\right)=\frac{k}{\overline{OA}.\overline{OB}}.\left(-\overline{AB}\right) \Rightarrow A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$
- Nếu A,B,O không thẳng hàng thì từ
$\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=k \Rightarrow OA.OA'=OB.OB'$
$$\Rightarrow \frac{OA}{OB'}=\frac{OB}{OA'} \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OB'A' \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA.OA'}{OA.OB}=\frac{|k|}{OA.OB}$$
$$\Rightarrow A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$

Ta nói góc tạo bởi một đường thẳng và một đường tròn là góc tạo bởi đường thẳng đó với tiếp tuyến của đường tròn tại điểm chung của chúng.

Tính chất 8. Góc tạo bởi đường thẳng d và đường tròn (C) cùng đi qua cực nghịch đảo có số đo bằng góc tạo bởi ảnh của chúng trong phép nghịch đảo đó.(Bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH TOÁN.

Các ví dụ

Ví dụ 1. (Định lí Ptolé meé) Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $AB.CD+AD.BC=AC.BD$.

Lời giải.

Xét phép nghịch đảo tâm A, phương tích $k\neq 0$ bất kì.

Gọi B',C',D' lần lượt là ảnh của A,B,C qua f_O^k.

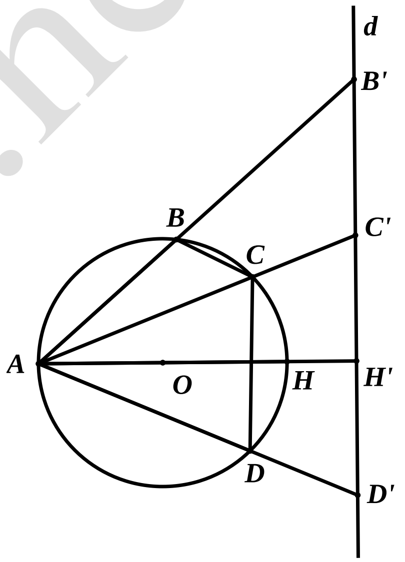
Vậy A,B,C,D nằm trên đường tròn $(O)\Leftrightarrow$ B',C',D' nằm đường thẳng d (ảnh của (O) qua f_O^k).

Vậy $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi

$B'C'+C'D'=B'D'$ $(*)$

Mà $B'C'=\dfrac{|k|}{AB.AC}.BC, C'D'=\dfrac{|k|}{AC.AD}.CD,$

$B'D'=\dfrac{|k|}{AB.AD}.BD$



Do đó

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{|k|}{AB.AC}.BC+\dfrac{|k|}{AC.AD}.CD$

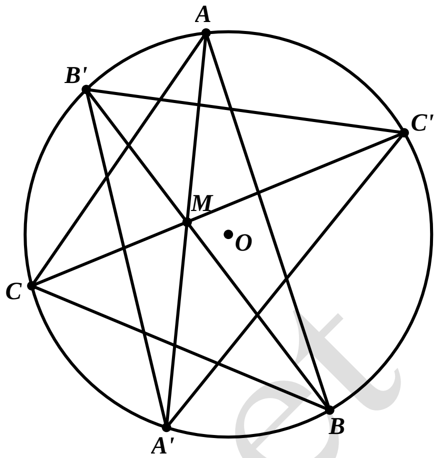
$=\dfrac{|k|}{AB.AD}.BD$

$\Leftrightarrow\dfrac{BC}{AB.AC}+\dfrac{CD}{AC.AD}=\dfrac{BD}{AB.AD}$

$\Leftrightarrow BC.AD+CD.AB=AC.BD$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Giả sử M là một điểm mằn trong đường tròn (O), các đường thẳng MA,MB,MC lần lượt cắt (O) tại các điểm A',B',C'. Chứng minh $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\dfrac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.

Lời giải.



Xét phép nghịch đảo cực M, phương tích $k = P_{M/(O)}$.

Do $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC'} = k \ (1)$

nên $f_O^k : A \to A', B \to B', C \to C'$, vì vậy

$A'B' = \dfrac{|k|}{MA.MB}.AB$,

$B'C' = \dfrac{|k|}{MB.MC}.BC$,

$A'C' = \dfrac{|k|}{MA.MC}.AC(2)$.

Mặt khác theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}, S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} \ (3).$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{|k|^3}{(MA.MB.MC)^2} = \dfrac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.(đpcm)

Bài toán 02: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONH BÀI TOÁN CHỨNG MINH THẲNG HÀNG VÀ ĐỒNG QUY.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 là các giao điểm thứ hai của AA_1, BB_1, CC_1 với (O), M, N, P lần lượt là trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.
Chứng minh:
a) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $MA_1A_2, NB_1B_2, PC_1C_2$ đi qua O.
b) Ba đường tròn trên có điểm chung thứ hai.

Lời giải.

a) Để chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $MA_1A_2, NB_1B_2, PC_1C_2$ đi qua O. Ta chỉ ra có phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó biến các đường tròn này thành đường thẳng.

Xét phép nghích đảo $f_O^{R^2}$.

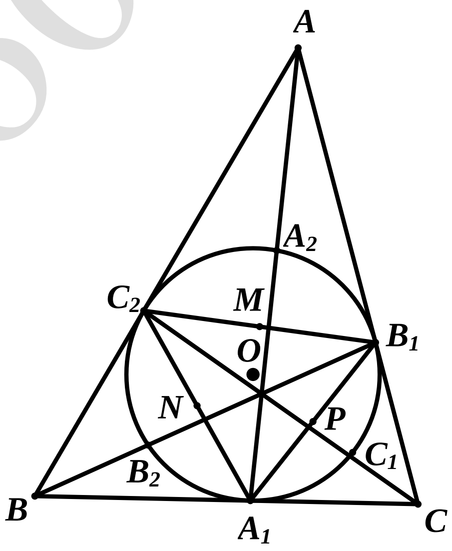
Dễ thấy A, M, O thẳng hàng, tam giác AB_1O vuông tại B_1 có đường cao B_1M nên $\overline{OM}.\overline{OA} = OB_1^2 = R^2$

$\Rightarrow f_O^{R^2} : M \to A$. Mặt khác

Mặt khác $(O;R)$ là đường tròn nghịch đảo của $f_O^{R^2}$ nên mọi điểm của (O) đều là điểm kép. Do đó

$\Rightarrow f_O^{R^2} : A_1 \to A_1, A_2 \to A_2$. Vậy đường tròn (MA_1A_2) có ảnh đi qua A, A_1, A_2. Đây là một đường thẳng nên (MA_1A_2) phải đi qua cực O.

Tương tự các đường tròn $(NBB_1), (PCC_1)$ cũng đi qua O.



b) Để chứng minh ba đường tròn trên có chung điểm thứ hai ta chỉ cần chứng minh ba đường thẳng ảnh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Dễ thấy $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1$ nên theo định lí cesva thì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm I, khi đó ba đường tròn trên cùng đi qua điểm I' là ảnh của I qua phép nghịch đảo $f_O^{R^2}$.

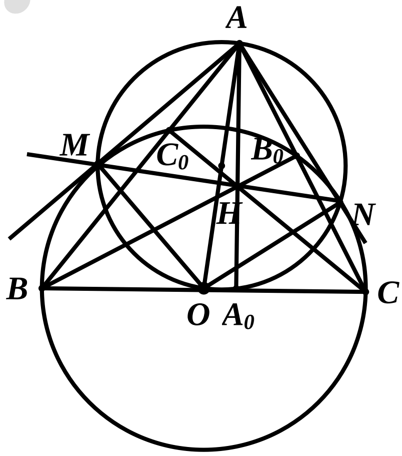
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi B_0, C_0 là các giao điểm của AC, AB với (O). Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ A đến (O). Chứng minh H, M, N thẳng hàng.

Lời giải.

Để chứng minh các điểm H, M, N thẳng hàng ta chứng minh nó là ảnh của ba điểm nằm trên một đường tròn đi qua cực trong một phép nghịch đảo nào đó.

Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $k=AM^2=AN^2$.

Ta có $f_A^{AM^2}: M\to M, N\to N$ nên $f_A^{AM^2}:(AMN)\to MN$. Gọi A_0 là ảnh của H trong phép nghịch đảo này.



Để chứng minh H, M, N thẳng hàng ta cần chứng minh $A_0\in(AMN)$.

Mà $\overline{AH}.\overline{AA_0}=AN^2=\overline{AB_0}.\overline{AC}$ nên tứ giác A_0CB_0H nội tiếp $\Rightarrow HA_0C=CB_0H=90^0$, do đó điểm A_0 nhì đoạn OA dưới một góc vuông suy ra $A_0\in(AMN)$

vì vậy $f_A^{AM^2}(A_0)=H\in MN$, hay H, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC, BD cắt nhau tại các điểm X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng AB khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại N. Chứng minh AM, DN, XY đồng quy.

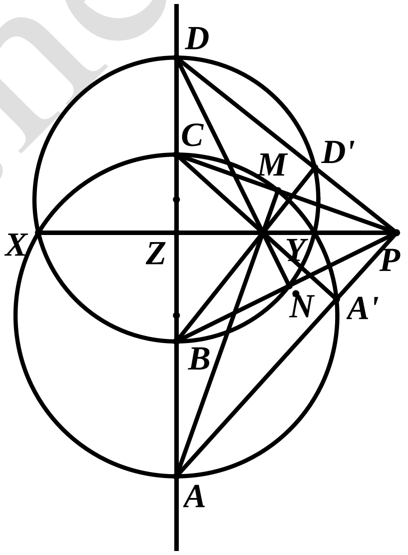
Lời giải.

Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy thường ta có hai hướng sau:

- Chứng minh nó là ảnh của ba đường tròn trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó mà ba đường tròn đó có điểm chung I khác O, khi đó ba đường thẳng này đồng quy tại $I' = f_O^k(I)$.
- Chứng minh hai đường thẳng là ảnh của hai đường tròn cắt nhau trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó và đường còn lại đi qua cực O, đồng thời là trục đẳng phương của hai đường tròn đó, khi đó ba đường thẳng sẽ đồng quy tại điểm I' (I' là ảnh của giao điểm (khác cực)của hai đường tròn)

Dựa vào sự phân tích này ta có lời giải sau khá tự nhiên

Gọi $(C_1),(C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD và $A' = PA \cap (C_1), D' = PD \cap (C_2)$. Do P nằm trên XY (trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)) nên $P_{P/(C_1)} = P_{P/(C_2)} \Rightarrow \overline{PB}.\overline{PN} = \overline{PC}.\overline{PM} = k$. Xét phép nghịc đảo cực P, phương tích k. Ta có $f_P^k : M \mapsto C, A \mapsto A' \Rightarrow (PA'C) \mapsto AM$.



Tương tự $f_P^k : N \mapsto B, D \mapsto D' \Rightarrow (PBD') \mapsto NB$. Do $f_P^k : XY \mapsto XY$ nên để chứng minh AM, DN, XY đồng quy ta sẽ chứng minh XY là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD'). Do $PZC = PA'C = 90^0 \Rightarrow Z \in (PA''C)$. Tương tự $Z \in (PBD')$ suy ra PZ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD').

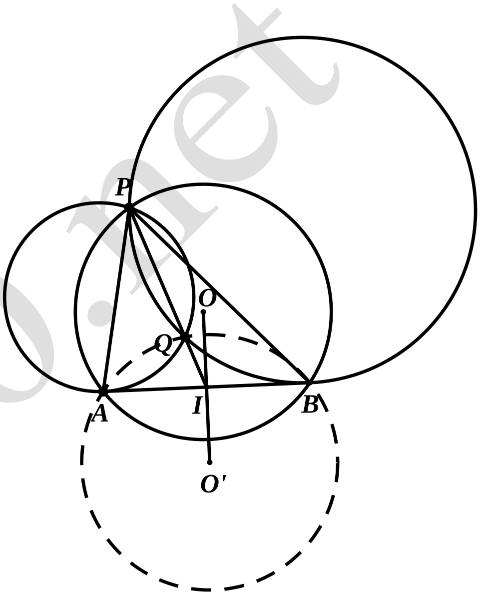
Vậy AM, DN, XY đồng quy.

Bài toán 03: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, P là một điểm thay đổi trên (O). Gọi (C) và (C') là hai đường tròn qua P lần lượt tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

Lời giải.



Gọi Q là giao điểm thứ hai của (C) và (C'), và I là giao điểm của PQ với AB, khi đó ta có $\overline{IQ}.\overline{IP}=IA^2=P_{I/(C)}$

$\overline{IQ}.\overline{IP}=IB^2=P_{I/(C')}$

$\Rightarrow IA^2=IB^2 \Rightarrow IA=IB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB.

Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích $k=IA^2$ ta có $f_I^k: Q \mapsto P$, mà $P\in(O)$ nên quỹ tích điểm Q là ảnh của (O) qua f_I^k. Vì $I\notin(O)$ nên ảnh của (O) là đường tròn.

Vì $f_I^{IA^2}=V_{\left(I,\frac{IA^2}{P_{I/(O)}}\right)}=V_{\left(I,\frac{IA^2}{-IA^2}\right)}=V_{(I,-1)}$, do phép vị tự tâm I, tỉ số -1 chính là phép đối xứng tâm I, do đó ảnh của (O) là đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Ch đường tròn (O) và điểm S nằm ngoài đường tròn (O).Hai cát tuyến lưu động qua S lần lượt cắt (O) tại A, A' và B, B'. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB' và SBA'. Tìm quỹ tích điểm M.

Lời giải.

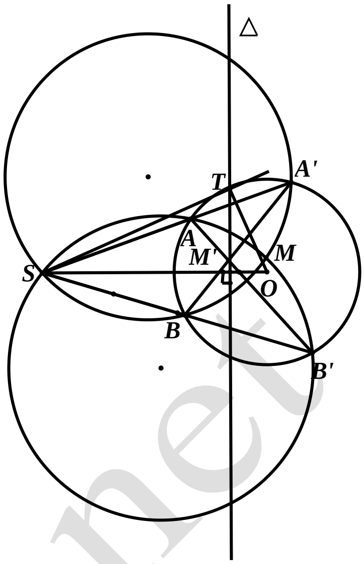
Xét phép nghịch đảo cực S, phương tích $k=P_{S/(O)}$, khi đó ta có:

$f_S^k : (O) \mapsto (O)$ (theo tính chất 3b).

Lại có $\overline{SA}.\overline{SA'} = P_{S/(O)} = \overline{SB}.\overline{SB'}$ nên

$A \to A', B \mapsto B'$ do đó $(SAB') \mapsto A'B$ và $(SBA') \mapsto B'A$. Do đó giao điểm M của hai đường tròn (SAB') và $(SA'B)$ biến thành điểm $M' = AB' \cap A'B$. Vẽ tiếp tuyến ST của (O), gọi H là giao điểm của SO với đường thẳng Δ đi qua T vuông góc với SO. Theo VD 2, ta có $M' \in \Delta$.

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính SO (đường tròn nghịch đảo), đây là ảnh của Δ qua phép nghịch đảo trên.



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của B, C trên Ac, AB. Chứng minh tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A song song với B_0C_0, từ đó suy ra $OA \perp B_0C_0$.

2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm I trên đoạn AB (khác A, B). Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt (O) tại P, Q (d không trùng với AB). Đường thẳng AP, AQ cắt tiếp tuyến m tại M, N; trong đó m là tiếp tuyến của (O) tại B. Chứng minh đường tròn (AMN) đi qua điểm cố định thứ hai, suy ra tâm của (AMN) nằm trên một đường thẳng cố định.

3. Cho ba điểm A, B, C nằm trên một đường thẳng . Qua A, B và một điểm E biến thiên của đường trung trực Δ của AB ta dựng đường tròn (ABE). Đường thẳng CE cắt đường tròn đó tại M. Tìm quỹ tích điểm M khi E di động trên Δ.