PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

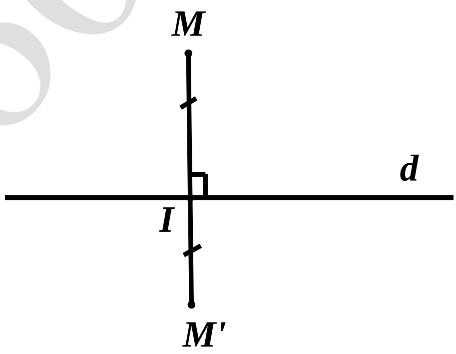
A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm

M' sao cho d là đường trung trực của đoạn MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d, hay còn gọi là phép đối xứng trục d.

Phép đối xứng trục có trục là đường thẳng d được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy $Đ_d(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=-\overrightarrow{IM'}$ với I là hình chiếu vuông góc của M trên d.



Nếu $Đ_d\left[(H)\right]=(H)$ thì d được gọi là trục đối xứng của hình (H).

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục:

Trong mặt phẳng Oxy, với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y')=Đ_d(M)$.

Nếu chọn d là trục Ox, thì $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$

Nếu chọn d là trục Oy, thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

3. Tính chất phép đối xứng trục:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA ĐỐI XỨNG TRỤC.

Phương pháp:

Để xác định ảnh (H') của hình (H) qua phép đối xứng trục ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dùng định nghĩa phép đối xứng trục
- Dùng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục mà trục đối xứng là các trục tọa độ.
- Dùng biểu thức vec tơ của phép đối xứng trục.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;5)$, đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Lời giải.

a) Gọi $M', d', (C')$ theo thứ tự là ảnh của $M, d, (C)$ qua $Đ_{ox}$, khi đó $M'(1;-5)$.

- Tìm ảnh của d.

Lấy $M(x;y)\in d\Rightarrow x+2y+4=0$ (1)

Gọi $N(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_{ox}$.

Ta có $\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=-y'\end{cases}$. Thay vào (1) ta được

$x'-2y'+4=0$. Vậy $d':x-2y+4=0$.

- Tìm ảnh của (C).

Cách 1: Ta thấy (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=3$.

Gọi I',R' là tâm và bán kính của (C') thì $I'(-1;-2)$ và $R'=R=3$, do đó $(C'):(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

Cách 2: Lấy $P(x;y)\in(C)\Rightarrow x^2+y^2+2x-4y-4=0$ (2).

Gọi $Q(x';y')$ là ảnh của P qua phép đối xứng $Đ_{ox}$. Ta có

$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=-y'\end{cases}$ thay vào (2) ta được $x'^2+y'^2+2x'+4y'-4=0$, hay $(C'):x^2+y^2+2x+4y-4=0$.

b) Đường thẳng d_1 đi qua M vuông góc với d có phương trình $2x-y+3=0$.

Gọi $I=d\cap d_1$ thì tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x+2y+4=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow I(-2;-1)$.

Gọi M' đối xứng với M qua d thì I là trung điểm của MM'.

Ta có $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M = -5 \\ y_{M'} = 2y_I - y_M = -7 \end{cases} \Rightarrow M'(-5;-7)$.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$, $d_1: x + 2y - 3 = 0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. Tìm ảnh của $d_1, (C)$ qua phép đối xứng trục d.

Lời giải.

- Tìm ảnh của d_1.

Ta có $d_1 \cap d = I(1;1)$ nên $Đ_d(I) = I$.

Lấy $M(3;0) \in d_1$. Đường thẳng d_2 đi qua M vuông góc với d có phương trình $x - y - 3 = 0$. Gọi $M_0 = d \cap d_2$, thì tọa độ của M_0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Gọi M' là ảnh của M qua $Đ_d$ thì M_0 là trung điểm của MM' nên

$M'(2;-1)$. Gọi $d_1' = Đ_d(d_1)$ thì d_1' đi qua I và M' nên có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$. Vậy $d_1': 2x + y - 3 = 0$.

- Tìm ảnh của (C).

Đường tròn (C) có tâm $J(1;-1)$ và bán kính $R = 2$.

Đường thẳng d_3 đi qua J và vuông góc với d có phương trình $x - y - 2 = 0$.

Gọi $J_0 = d_3 \cap d$ thì tọa độ của điểm J_0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow J_0(2;0).$$

Gọi $J' = Đ_d(J)$ thì J_0 là trung điểm của JJ' nên $J'(3;1)$

Gọi $(C') = Đ_d((C))$ thì J' là tâm của (C') và bán kính của (C') là $R' = R = 2$.

Vậy $(C'):(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Bài toán 02: DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

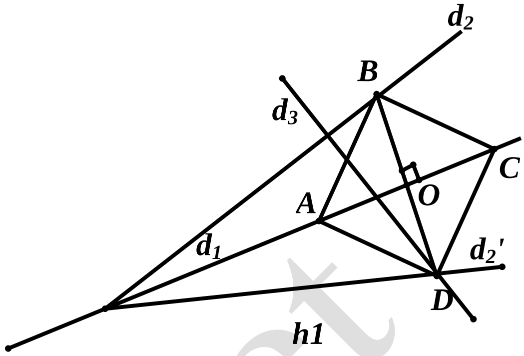
Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng trục, hoặc xem M như là giao điểm của một đường cố định và một với ảnh của một đường đã biết qua phép đối xứng trục.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Dựng hình vuông $ABCD$ biết hai đỉnh A và C nằm trên đường thẳng d_1 và hai đỉnh B, D lần lượt thuộc hai đường thẳng d_2, d_3.

Lời giải.

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$, thỏa các điều kiện của bài toán. Do $A, C \in d_2$ và AC là trục đối xứng của hình vuông $ABCD$. Mặt khác $B \in d_2$ nên $D \in d_2'$



$\Rightarrow D = d_2' \cap d_3$.

Hai điểm B, D đối xứng qua đường thẳng d_1.

Nên $Đ_{d_1}(B) = D'$, lại có $D \in d_3 \Rightarrow D = d_3 \cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng $d_2' = Đ_{d_1}(d_2)$, gọi $D = d_2 \cap d_2'$
- Dựng đường thẳng qua D vuông góc với d_1 tại O và cắt d_2 tại B
- Dựng đường tròn tâm O đường kính BD cắt d_1 tại A, C. (Kí hiệu các điểm A, C theo thứ tự để tạo thành tứ giác $ABCD$)

Chứng minh: Từ cách dựng suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Biện luận:

Trường hợp 1. d_2 cắt d_3 khi đó.

Nếu $d_2' \cap d_3$ thì ví dụ đã cho có một nghiệm hình.

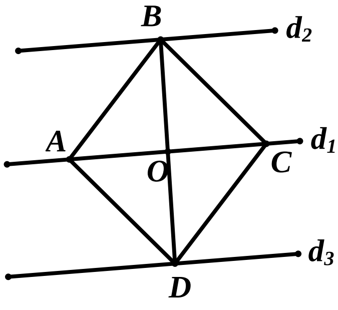
Nếu $d_2' // d_3$ thì ví dụ đã cho vô nghiệm hình.

Trường hợp 2. $d_2 // d_3$, khi đó

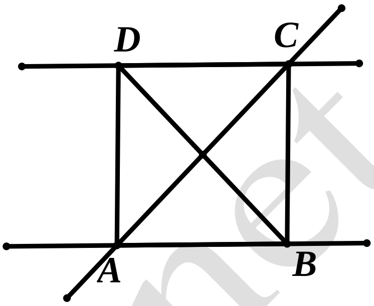
Nếu d_1 song song và cách đều d_2 và d_3 thì có vô số nghiệm hình ($h2$)

Nếu d_1 hợp với d_2, d_3 một góc $45°$ thì có một nghiệm hình ($h3$)

Nếu d_1 song song và không cách đều d_2, d_3 hoặc d_1 không hợp d_2, d_3 một góc $45°$ thì ví dụ đã cho vô nghiệm hình.



h2

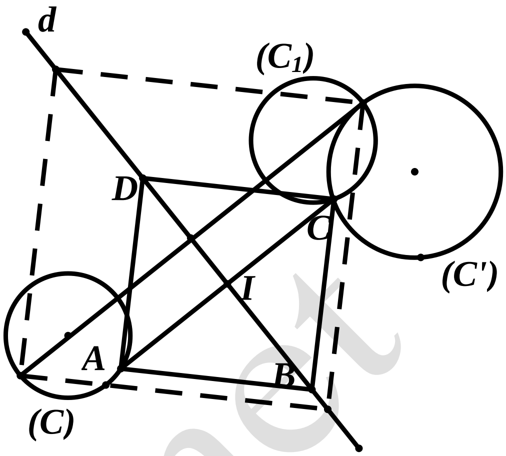


h3

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(C),(C')$ có bán kính khác nhau và đường thẳng d. Hãy dựng hình vuông $ABCD$ có hai đỉnh A,C lần lượt nằm trên $(C),(C')$ và hai đỉnh còn lại nằm trên d.

Lời giải.

Phân tích:



Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ thỏa mãn đề bài. Ta thấy hai đỉnh $B,D \in d$ nên hình vuông hoàn toàn xác định khi biết C. Ta có A,C đối xứng qua d nên C thuộc đường tròn (C_1), ảnh của đường tròn (C) qua $Đ_d$. Mặt khác $C \in (C') \Rightarrow C \in (C) \cap (C')$.

Từ đó suy ra cách dựng

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua $Đ_d$.
- Từ điểm C thuộc $(C_1) \cap (C')$ dựng điểm A đối xứng với C qua d. Gọi $I = AC \cap d$
- Lấy trên d hai điểm BD sao cho $IB = ID = IA$.

Khi đó $ABCD$ là hình vuông cần dựng.

Chứng minh:

Dễ thấy $ABCD$ là hình vuông có $B,D \in d$, $C \in (C')$. Mặt khác A,C đối xứng qua d mà $C \in (C') \Rightarrow A \in Đ_d\left[(C')\right] = (C)$ hay A thuộc (C).

Biện luận:

Số nghiệm hình bằng số giao điểm của (C_1) và (C').

Bài toán 03: DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

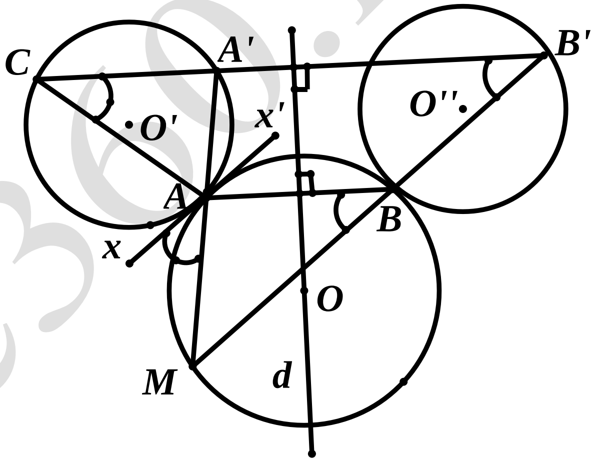
Sử dụng tính chất : Nếu $N = Đ_d(M)$ với M di động trên hình (H) thì N di động trên hình (H') - ảnh của hình (H) qua phép đối xứng trục d.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O,R) cho hai điểm cố định A,B. Đường tròn $(O';R')$ tiếp xúc ngoài với (O) tại A. Một điểm M di động trên (O). MA cắt (O') tại điểm thứ hai A'. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AB cắt MB tại B'.

Tìm quỹ tích điểm B'

Lời giải.

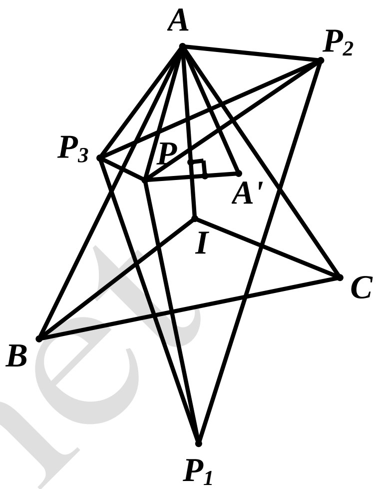


Gọi $C = A'B' \cap (O')$. Vẽ tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại điểm A. Ta có $\widehat{A'CA} = \widehat{xAM}$

$= \widehat{ABM} = \widehat{BB'A'}$ do đó $ABB'C$ là hình thang cân. Gọi d là trục đối xứng của hình thang này thì $Đ_d(C) = B'$ mà C di động trên đường tròn (O') nên B' di động trên đường tròn (O'') ảnh của (O') qua $Đ_d$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I, P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A',B',C' là các điểm đối xứng với P lần lượt đối xứng qua IA,IB,IC. Chứng minh các đường thẳng AA',BB',CC' đồng quy.

Lời giải.



Giả sử điểm P nằm trong tam giác IAB. Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt đối xứng với P qua các cạnh BC, CA, AB. Ta sẽ chứng minh AA', BB', CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.

Hiển nhiên ta có $AP_2 = AP_3$ vậy để chứng minh AA' là trung trực của P_2P_3 ta cần chứng minh $P_2AA' = P_3AA'$.

Ta có $P_3AA' = P_3AP + PAA' = 2\alpha + 2\beta$

Tương tự $P_2AA' = P_2AC + CAA' = CAP + CAA'$ $= 2\alpha + 2\beta$. Vậy $P_2AA' = P_3AA'$ nên AA' là trung trực của P_2P_3.

Tương tự BB', CC' lần lượt là trung trực của P_1P_3 và P_1P_2 nên chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + 2y - 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng trục có trục là

a) Ox

b) Oy

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

a) Tìm ảnh của $d, (C)$ qua phép đối xúng trục Ox.

b) Viết phương trình đường tròn (C'), ảnh của (C) qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

11.

a) Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của d. Xác định điểm M trên d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

b) Cho $x-2y+2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}$.

12. Cho $A(2;1)$. Tìm điểm B trên trục hoành và điểm C trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$.

a) Gọi K là trung điểm của EG. Chứng minh K nằm trên đường thẳng AH.

b) Gọi P là giao điểm của DE và FG. Chứng minh P nằm trên đường thẳng AH.

c) Chứng minh các đường thẳng AH, CD, EF đồng qui.

14. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết cạnh AB nằm trên đường thẳng d_1, cạnh BC nằm trên đường thẳng d_2, cạnh AC đi qua M. Hãy xác định các đỉnh của tam giác ABC.

15. Cho một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A. Trên d đặt một đoạn $BC=a$ ($a>0$ cho trước). Tìm vị trí của đoạn BC để tổng $AB+AC$ nhỏ nhất.

16. Cho hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2 và điểm M nằm ở miền giữa của hai đường thẳng đó (M và Δ_1 cùng phía đối với Δ_2, M và Δ_2 cùng phía đối với Δ_1). Trên Δ_1 lấy đoạn $AB=a$ trên Δ_2 lấy đoạn $CD=b$ (a, b là các độ dài cho trước). Tìm vị trí của các đoạn AB và CD sao cho tổng $MA+MB+MC+MD$ nhỏ nhất.

17. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A và có cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra một phép đối xứng trục biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $AB'C'D'$.

18. Gọi d_A là đường phân giác ngoài tại A của tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M trên d_A, chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

19. Cho tam giác ABC cân tại A. Với mỗi điểm M trên cạnh BC, ta dựng hình bình hành $APMQ$ (P thuộc cạnh AB và Q thuộc cạnh AC). Tìm tập hợp ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua đường thẳng PQ.

20. Cho tam giác nhọn ABC

a) Gọi D là một điểm cố định trên cạnh BC. Xác định các điểm E,F trên AB và AC sao cho chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

b) Cho D thay đổi trên cạnh BC. Dựng tam giác DEF có chu vi nhỏ nhất với E,F lần lượt thuộc các cạnh AB, AC. Chứng minh khi chu vi tam giác DEF nhỏ nhất thì D,E,F là chân các đường cao của tam giác ABC. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác DEF theo $BC=a, CA=b, AB=c$.