PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Phép đối xứng tâm I được kí hiệu là $Đ_I$.

Vậy $Đ_I(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$

Nếu $Đ_I((H))=(H)$ thì I được gọi là tâm đối xứng của hình (H).

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm.

Trong mặt phẳng Oxy cho $I(a;b)$, $M(x;y)$, gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I thì $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$

3. Tính chất phép đối xứng tâm.

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM.

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ và các tính chất của phép đối xứng tâm.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $d: x+2y+3=0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

Lời giải.

Cách 1. Lấy điểm $M(x;y)\in d \Rightarrow x+2y+3=0 \quad (*)$

Gọi $M'(x';y')=Đ_I(M)$ thì $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=2-y' \end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $(2-x')+2(2-y')+3=0 \Leftrightarrow x'+2y'-9=0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': x+2y-3=0$.

Cách 2. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I, thì d' song song hoặc trùng với d nên phương trình d' có dạng $x+2y+c=0$.

Lấy $N(-3;0)\in d$, gọi $N'=Đ_I(N)$ thì $N'(5;2)$.

Lại có $N'\in d' \Rightarrow 5+2.2+c=0 \Leftrightarrow c=-9$.

Vậy $d': x+2y-3=0$.

Bài toán 02: XÁC ĐỊNH TÂM ĐỐI XỨNG KHI BIẾT ẢNH VÀ TẠO ẢNH.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $d: x-2y+6=0$ và $d': x-2y-10=0$. Tìm phép đối xứng tâm I biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d, d' với Ox lần lượt là $A(-6;0)$ và $B(10;0)$.

Do phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó nên biến giao điểm A của d với Ox thành giao điểm A' của d' với Ox do đó tâm đối xứng là trung điểm của AA'. Vậy tâm đỗi xứng là $I(2;0)$.

Bài toán 03: TÌM TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tâm đối xứng của đường cong (C) có phương trình $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Lời giải.

Lấy điểm $M(x;y) \in (C) \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2\ (*)$

Gọi $I(a;b)$ là tâm đối xứng của (C) và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Ta có $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$

Thay vào $(*)$ ta được $2b - y' = (2a - x')^3 - 3(2a - x')^2 + 3$

$\Leftrightarrow y' = x'^3 - 3x'^2 + 3 + (6-6a)x'^2 + (12a^2 - 12a)x' - 8a^3 + 12a^2 + 2b + 6\ (*)$

Mặt khác $M' \in (C)$ nên $y' = x'^3 - 3x'^2 + 3$ do đó $(*)$

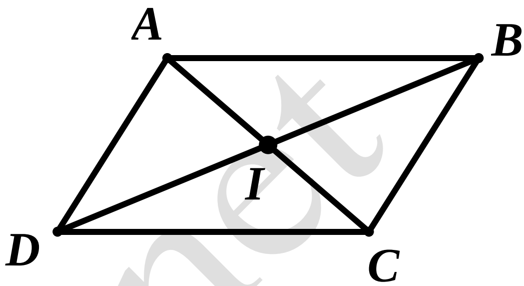
$\Leftrightarrow (6-6a)x'^2 + (12a^2 - 12a)x' - 8a^3 + 12a^2 + 2b - 6 = 0, \forall x'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 6a = 0 \\ 12a^2 - 12a = 0 \\ -8a^3 + 12a^2 + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy $I(1;1)$ là tâm đối xứng của (C).

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Lời giải.



Giả sử tứ giác $ABCD$ có tâm đối xứng là I. Vì qua phép biến hình đỉnh của một đa giác cũng được biến thành đỉnh của đa giác nên đỉnh A có thể được biến thành A, B, C hay D.

- Nếu đỉnh A được biến thành chính nó thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow I \equiv A$ vô lí
- Nếu A biến thành B (hoặc D) thì I là trung điểm của AB (hoăc I là trung điểm của AD) cũng vô lí.

Vậy A được biến thành C, lí luận tương tự thì B chỉ được biến thành D, vì vậy I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác $ABCD$ phải là hình bình hành.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

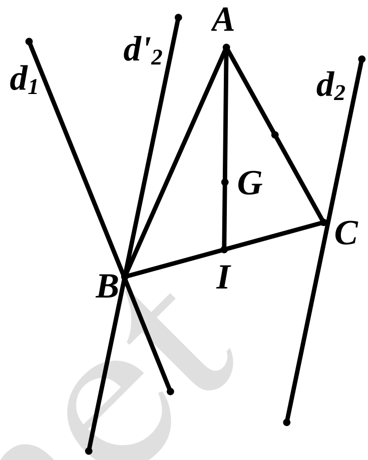
Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Đ_I$ nào đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 và hai điểm A, G không thuộc d_1, d_2. Hãy dựng tam giác ABC có trọng tâm G và hai đỉnh B, C lần lượt thuộc d_1 và d_2.

Lời giải.

Phân tích:



Giả sử đã dượng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán

Gọi I là trung điểm của BC thì $Đ_I(C) = B$ mà $C \in d_2$ nên $B \in d_2'$ với d_2' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I. Lại có $B \in d_1 \Rightarrow B = d_1 \cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$
- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $Đ_I$
- Gọi $B = d_1 \cap d_2'$
- Dựng điểm $C = Đ_I(B)$

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh:

Dựa vào cách dựng ta có I là trung điểm của BC và $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

Biện luận: Số nghiệm hình bằng số giao điểm của d_1 và d_2'.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B vá số $a > 0$. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt hai đường tròn thành hai dây cung mà hiệu độ dài bằng a.

Lời giải.

Phân tích:

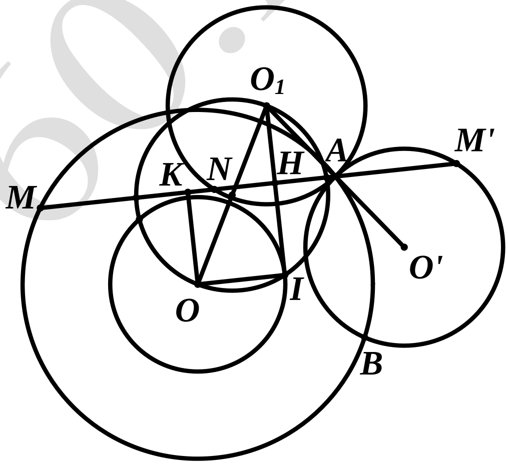
Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) và (O') tại M, M' sao cho $AM - AM' = a$ (giả sử $AM > AM'$).

Xét phép đối xứng $Đ_A$

Gọi $N = Đ_A(M), (O_1) = Đ_A((O))$, H, K lần lượt là trung điểm của AN và AM, khi đó $HO_1 \perp AM$ và $OK \perp AM$. Gọi I là hình chiếu của O trên O_1H, ta có $OI // = KH$, mặt khác $KH = KA - HA$

$= \frac{AM - AN}{2} = \frac{AM - AM'}{2} = \frac{a}{2}$ nên $OI = \frac{a}{2}$. Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{a}{2}$.

Mặt khác I thuộc đường tròn đường kính OO_1 nên I là giao điểm của đường tròn đường kính OO_1 với đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$ do đó I xác định và d là đường thẳng đi qua A và song song với OI.



Cách dựng:

- Dựng (O_1) ảnh của (O) qua $Đ_A$.
- Dựng đường tròn đường kính OO_1.
- Dựng đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$, và dựng giao điểm I của đường tròn đường kính OO_1 với đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$.

- Từ A dựng đường thẳng $d // OI$ cắt (O) tại M và cắt (O') tại M' thì d là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AN, AM ta có $KH = OI = \frac{a}{2}$

Mà $KH = AK - AH = \frac{AM}{2} - \frac{AN}{2} = \frac{AM - AM'}{2} \Rightarrow AM - AM' = a$.

Biện luân **:** Số nghiệm hình bằng số giao điểm của đường tròn $\left(O;\frac{a}{2}\right)$ và đường tròn đường kính OO_1.

Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường tròn (O). Trên AB lấy điểm E sao cho $BE = 2AE$, F là trung điểm của AC và I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AEIF$. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O), ta dựng điểm Q sao cho $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp điểm Q khi P thay đổi trên (O)

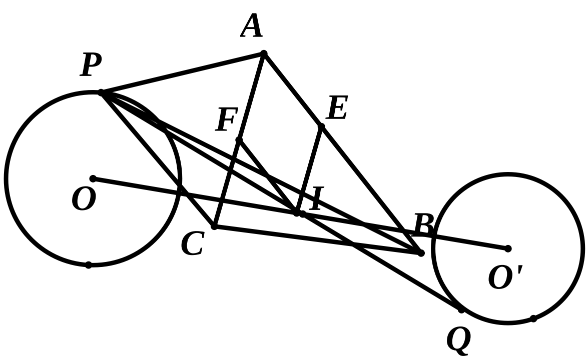
Lời giải.

Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Khi đó

$\overrightarrow{KA} + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}\right)$
$+3\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Mặt khác $AEIF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên $K \equiv I$.

Từ giả thiết suy ra $6\overrightarrow{PK} + \left(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}\right) = 6\overrightarrow{IQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{IQ}$, hay $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IQ}$.

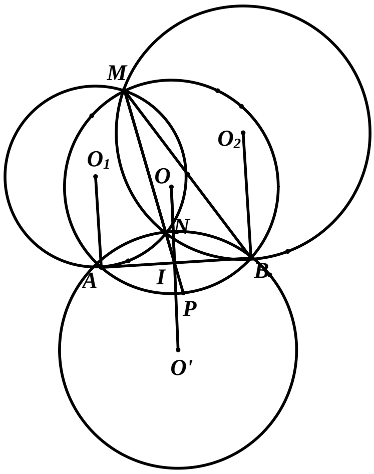
Vậy $Đ_I(P) = Q$ mà P di động trên đường tròn (O) nên Q di động trên đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng với A, B. Hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cùng đi qua M và tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Tìm tập hợp điểm N khi M di động.

Lời giải.

Gọi $I = MN \cap AB$, ta có $IA^2 = IM.IN \quad (1)$

Tương tự $IB^2 = IM.IN \ (2)$.



Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB$ nên I là trung điểm của AB.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với đường tròn (O).

Dễ thấy $P_{I/(O)} = -IM.IP = -IA.IB = -IA^2$

Do đó $-IM.IN = -IM.IP \Rightarrow IN = IP$ vậy I là trung điểm của NP do đó $Đ_I(P) = N$, mà P di động trên đường tròn (O) nên N di động trên đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Vậy tập hợp điểm N là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

21. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ qua phép đối xứng tâm $I(-1;2)$.

22. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x-y-3=0$ và $d_2: x+y=0$. Phép đối xứng tâm I biến d_1 thành $d_1': 3x-y+1=0$ và biến d_2 thành $d_2': x+y-6=0$.

23. Cho đường cong $(C): y=\frac{1}{x}$ và điểm $A(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ cắt đường cong (C) tại hai điểm M, N sao cho AM^2+AN^2 nhỏ nhất.

24. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành $ABCD$ lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $A'B'C'D'$ cũng là hình bình hành. Chứng minh hai hình bình hành đó có cùng tâm.

25. Cho hai điểm A, C và đường tròn (O). Dựng hình bình hành $ABCD$ có hai đỉnh B, D thuộc (O).

26. Cho hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N sao cho A là trung điểm của MN.

27. a) Cho góc xOy và một điểm A thuộc miền trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng qua A cắt Ox, Oy theo thứ tự tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

b) Chứng minh một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox, Oy lần lượt tại C, D thì luôn có $S_{OCD} \geq S_{OMN}$.

hoc360.net