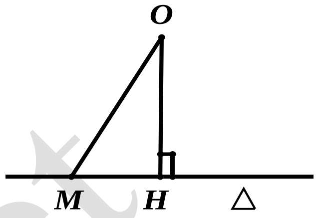
KHOẢNG CÁCH

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

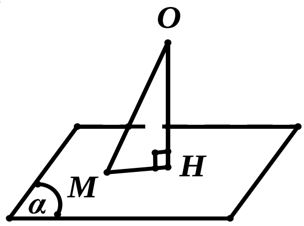


Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp(M,\Delta)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

$d(M,\Delta) = MH$

Nhận xét: $OH \le OM, \forall M \in \Delta$

2. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

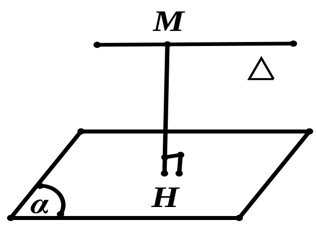


Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

$d(M,(\alpha)) = MH$

Nhận xét: $OH \le MO, \forall M \in (\alpha)$

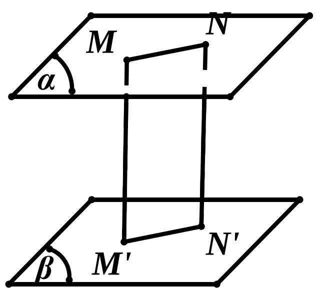
3. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.



Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

$d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha)), M \in \Delta$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

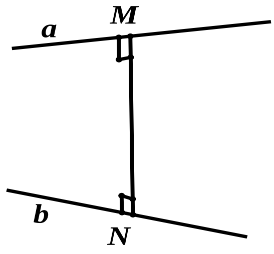


Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta)) = d(N,(\alpha))$ $, M \in (\alpha), N \in (\beta)$.

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM M ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG Δ.

Phương pháp:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

- Trong $mp(M,\Delta)$ vẽ $MH\perp\Delta \Rightarrow d(M,\Delta)=MH$
- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H

$\Rightarrow d(M,\Delta)=MH$.

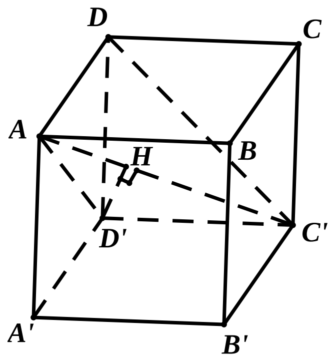
Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

- ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\dfrac{1}{MH^2}=\dfrac{1}{MA^2}+\dfrac{1}{MB^2}$.
- MH là đường cao của ΔMAB thì $MH=\dfrac{2S_{MAB}}{AB}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng các từ đỉnh D' đến đường chéo AC'.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của D' trên AC'.

Do $\begin{cases} C'D'\perp D'A' \\ C'D'\perp DD' \end{cases} \Rightarrow C'D'\perp(ADD'A')$

$\Rightarrow C'D'\perp D'A$.

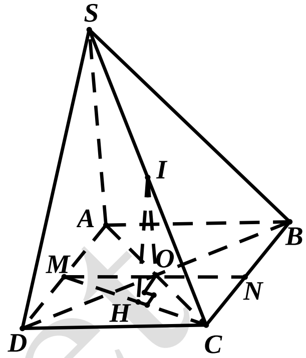
Vậy tam giác $D'AC'$ vuông tại D' có đường cao $D'H$

suy ra $\dfrac{1}{D'H^2}=\dfrac{1}{D'A^2}+\dfrac{1}{D'C'^2}=\dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow D'H=a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy $d(D',AC')=a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM.



Lời giải.

Trong (ICM) kẻ $IH \perp CM$ thì $d(I,CM) = IH$.

Gọi $N = MO \cap DC, N \in CD$.

Ta có $\Delta MHO \sim \Delta MNC \Rightarrow \dfrac{OH}{CN} = \dfrac{OM}{MC}$

Mà $OM = CN = \dfrac{a}{2}, CM = \sqrt{BM^2 + BC^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $OH = \dfrac{CN.OM}{MC} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$, OI là đường trung bình trong tam giác SAC

nên $OI = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} OI // SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OH \Rightarrow \Delta OHI$ vuông tại O

nên $IH = \sqrt{OH^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{3}{10}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Vậy $d(I,CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

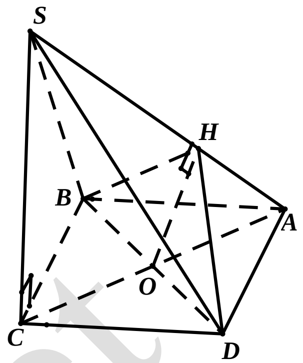
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $ABC = 120^0$, $SC \perp (ABCD)$ và $SC = h$. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SA theo a và h.

Lời giải.

Kẻ $OH \perp SA, H \in SA$ thì $d(O,SA) = OH$.

Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 120^0$ nên

ΔCBD đều cạnh $a \Rightarrow CO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CA = 2CO = a\sqrt{3}$.



$$SA = \sqrt{CS^2 + CA^2} = \sqrt{h^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3a^2 + h^2}$$

Hai tam giác vuông AHO va ACS đồng dạng nên

$$\frac{OH}{SC} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow OH = \frac{OA.SC}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{3a^2 + h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2 + h^2}}$$

Vậy $d(O,SA) = OH = \dfrac{\sqrt{3}ah}{2\sqrt{3a^2 + h^2}}$.

Ví dụ 4. . Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE.

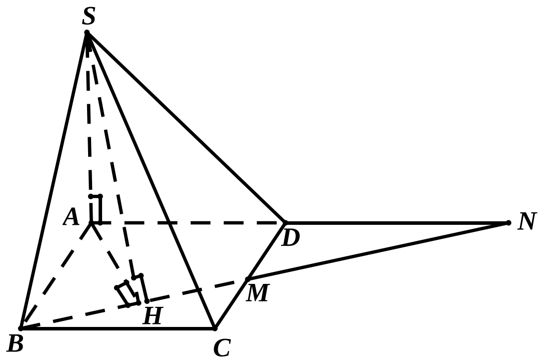
Lời giải.

Trong (SBM) kẻ $SH \perp BM$ thì $d(S,BM) = SH$.

Gọi $N = BM \cap AD$, ta có

$AD \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{DN}{BC} = \dfrac{MD}{MC} = 1 \Rightarrow DN = BC = a$

$\Rightarrow AN = 2a$.



Tronh tam giác vuông ABN có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AN^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AH \Rightarrow \Delta ASH$ vuông tại A, do đó

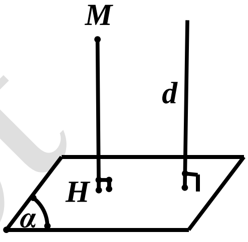
$$SH = \sqrt{AH^2 + AS^2} = \sqrt{\frac{4}{5}a^2 + a^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(S,BM) = SH = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 02: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

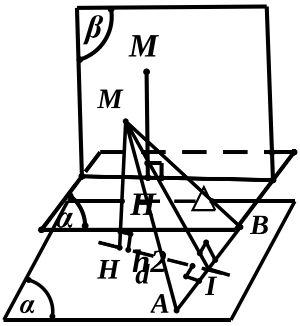
Phương pháp:

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α). Để xác định được vị trí hình chiếu này ta có một số lưu ý sau:



h1

- Nếu có $d \perp (\alpha)$ thì $MH // d$ (h1).
- Chọn (β) chứa điểm M, rồi xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$. Trong (β) dựng $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (\alpha)$ (h2).
- Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH \perp d$. Khi đó $MH \perp (\alpha)$ (h3)



h3

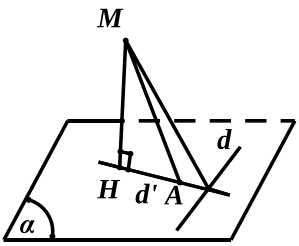
Thật vậy , Gọi I là trung điểm của AB. Do $MA = MB$ nên ΔMAB cân tại $M \Rightarrow MI \perp AB \subset (\alpha)$. Lại có

$AB \perp d \Rightarrow AB \perp mp(M,d)$

$\Rightarrow AB \perp MH$.

Vậy $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp d \end{cases} \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.

- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.(*h4*)



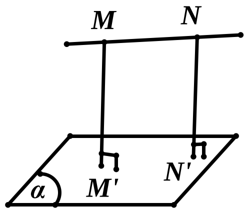
h4

Thật vậy , do $d \perp d'$ và $d \perp MA \Rightarrow d \perp mp(M,d') \Rightarrow d \perp MH$

Lại có $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp mp(d,d') \equiv (\alpha)$.

- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$ mà $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.

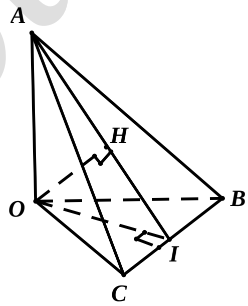
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n (n \ge 3)$ mà các mặt phẳng $(MA_1A_2), (MA_2A_3), ..., (MA_nA_1)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Đôi khi, thay vì hình chiếu của điểm M xuống (α) ta có thể dựng hình chiếu một điểm N khác thích hợp hơn sao cho $MN // (\alpha)$. Khi đó $d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$. (h5)



h5

d(M,(α))=d(N,(α))

- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tự như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:
- Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

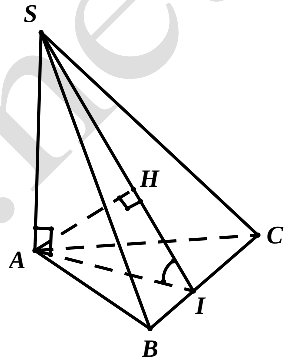
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy AIS chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow AIS = 60^0$.

Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$.



Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

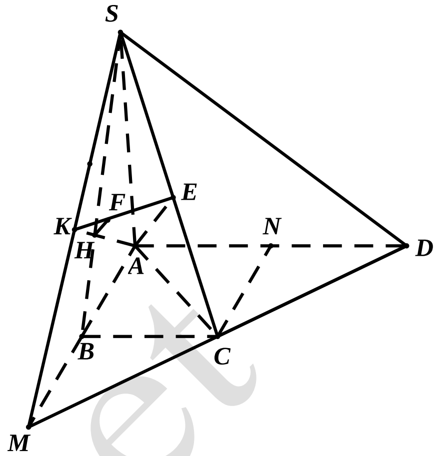
Trong tam giác AIS ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$.

Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD) \quad (1)$

Trong (AKE) kẻ $HF \,//\, AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF$.

Do $BC \,//\, AD \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a \Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

Lại có $\frac{BH}{BS} = \frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \frac{a^2}{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$.

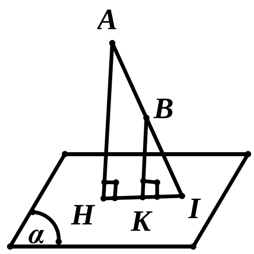
Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\frac{HF}{AE} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}AE$.

Tứ diện $ADMS$ có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và

$AE \perp (SMD)$ nên $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2}$

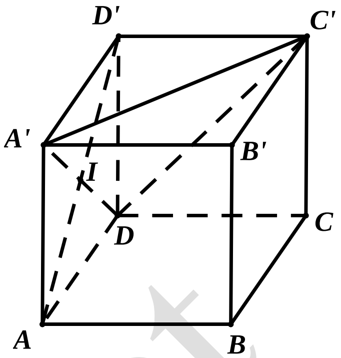
$= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AE = a$.

Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF = \frac{1}{3}AE = \frac{a}{3}$.



Nhận xét: Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì $\frac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))} = \frac{IA}{IB}$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.



Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD'.

Ta có $\dfrac{d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)}{d\left(D',\left(DA'C'\right)\right)}=\dfrac{IA}{ID'}=1$

$\Rightarrow d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)=d\left(D',\left(DA'C'\right)\right)$.

Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D,D'A',D'C'$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2\left(D',\left(DA'C'\right)\right)}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Vậy $d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

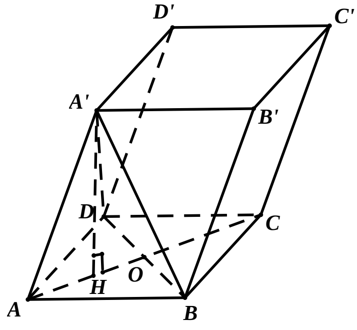
Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $BAA'=BAD=DAA'=60^0$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $BAA'=BAD=DAA'=60^0$ nên các tam giác ABA',ABD,ADA' đều là các tam giác đều cạnh $a\Rightarrow A'A=A'B=A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của ΔABD)

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ thì các tam giác vuông $A'HA,A'HB,A'HD$ bằng nhau nên $HA=HB=HD$ suy ra H là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có



$AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Vậy $d\left(A',\left(ABCD\right)\right)=A'H=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng $2a$, $BC=3a$ các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $\left(ABCD\right)$, Gọi I_1,I_2,I_3,I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB,BC,CD,DA thì các góc $II_iS\left(i=1,4\right)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau,suy ra các tam giác vuông SII_1,SII_2,SII_3,SII_4 bằng nhau nên $II_1=II_2=II_3=II_4\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang $ABCD$.

Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB+DC=AD+BC=5a$

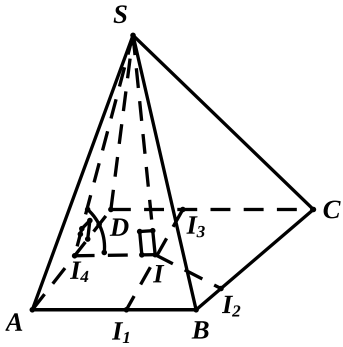
Diện tích hình thang $ABCD$ là $S=\frac{1}{2}\left(AB+DC\right)AD=\frac{1}{2}.5a.2a=5a^2$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang $ABCD$ thì

$p=\frac{AB+DC+AD+BC}{2}=\frac{10a}{2}=5a$

$S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{5a^2}{5a}=a\Rightarrow II_4=r=a$.

Tam giác SAD đều và có cạnh $2a$ nên



$SI_4=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SI_4{}^2-II_4{}^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$ Vậy

$d\left(S,\left(ABCD\right)\right)=SI=a\sqrt{2}$.

Bài toán 03: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

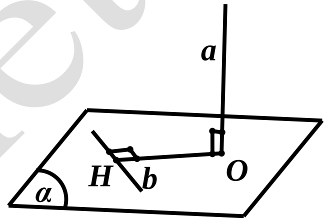
Phương pháp:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b)=MN$. Sau đây là một số cách dựng đoạn vuông góc chung thường dùng :

Nếu $a\perp b$ thì ta dựng đoạnvuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng $OH\perp b$.

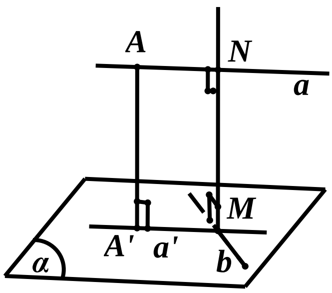


Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

Nếu a,b không vuông góc với nhau thì có thể dựng đoạn vuông góc chung của a và b theo hai cách sau:

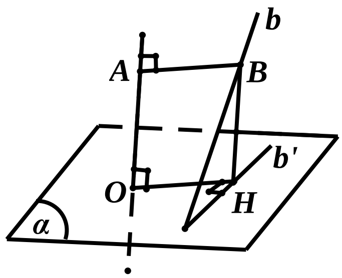
Cách 1.

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A\in a$ trên (α).
- Trong (α) dựng đường thẳng a' đi qua A' và song song với a cắt b tại M, từ M dựng đường thẳng song song với AA' cắt a tại N. Đoạn MN chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

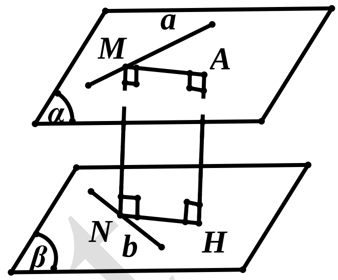


Cách 2.

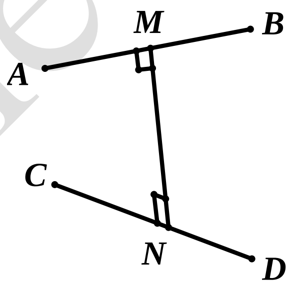
- Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng hình chiếu b' của b trên (α)
- Trong (α) dựng $OH\perp b'$ tại H.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Đoạn AB chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



- Xem khoảng cách giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm $A\in a$ đến mặt phẳng (α) chứa b và $(\alpha)\,//\,a$.
- Sử dụng $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))=d(A,(\beta)), A\in(\alpha)$
- Sử dụng phương pháp vec tơ

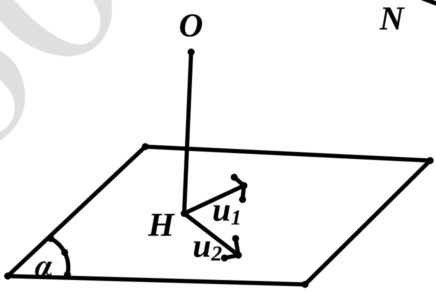


a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$



b) Nếu trong (α) có hai vec tơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ thì $OH=d(O,(\alpha))\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_2}\\ H\in(\alpha)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2}=0\\ H\in(\alpha)\end{cases}$.



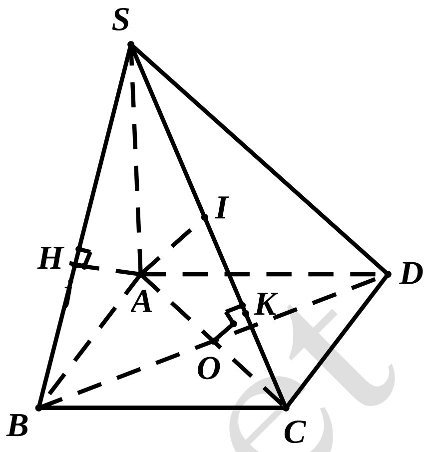
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.

a) Trong (SAB) kẻ $PJ // SI$, từ J kẻ $JE // BD, E \in AC$

Từ E kẻ $EF // PJ, F \in PN$.

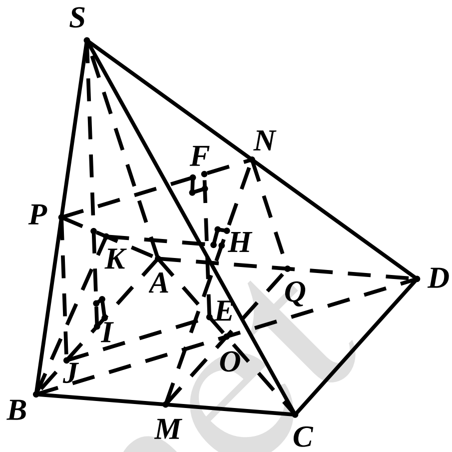
Do $\begin{cases} PJ // SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

$\Rightarrow PJ \perp AC \ (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN // BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.



$d(AC, PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ // AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ // (SAB)$.

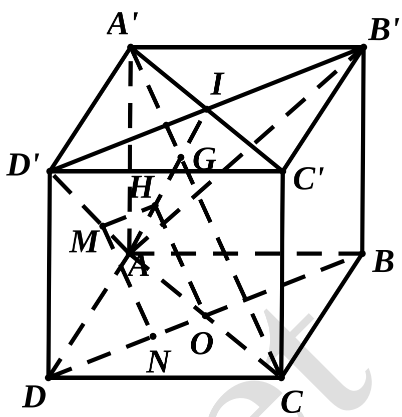
Tương tự $NQ // SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ // (SAB)$.

Vậy $(MNQ) // (SAB) \Rightarrow NM // (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN, AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.



Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Do $\begin{cases} BD // B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A,G,I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH // CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

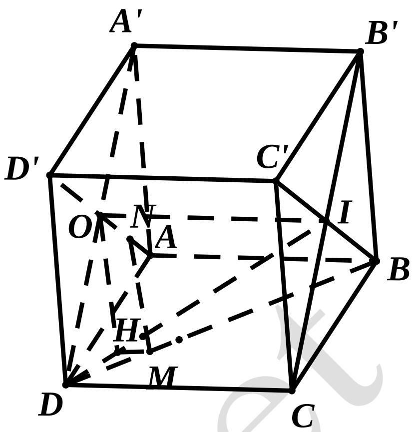
Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Chon $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.



Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên

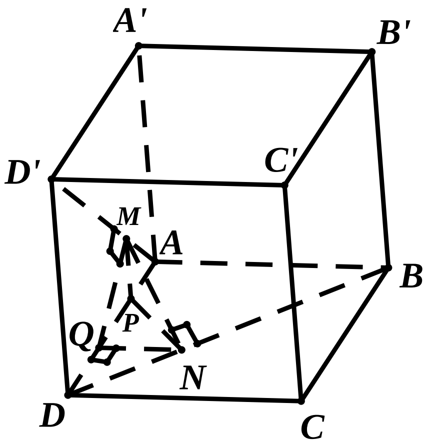
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$;

$AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.



Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

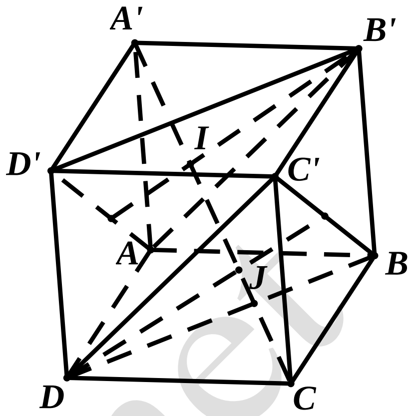
$$QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') // (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC'))$.

Gọi I,J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'),(BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I,J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dạng chứng minh được $A'C \perp (AB'D'), A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ

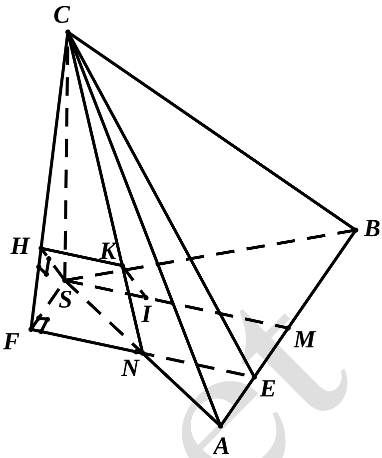
$\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.



Gọi E là trung điểm của AM, ta có

$\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM \,//\, NE \end{cases} \Rightarrow SM \,//\, (CNE)$, do đó

(CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì

$\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$

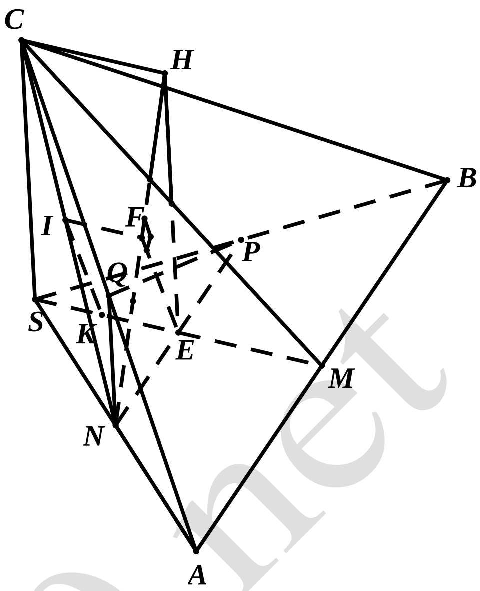
Trong (CSF) kẻ $SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

Ta có $SF = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SF^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $d(SM, CN) = IK = SH = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.

Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ).Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN, SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$.

EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E \in SM \\ F \in CN \\ EF \perp SM \\ EF \perp CN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SE} = x\overrightarrow{SM} \\ \overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN} = 0 \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{SE} = \vec{c} + y\overrightarrow{CN} - x\overrightarrow{SM}$

$$= \vec{c} - \frac{x}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}(y - x)\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b} + (1 - y)\vec{c}.$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM}=0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -x+5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{9} \\ y=\dfrac{8}{9} \end{cases}$

Vậy đường vuông góc chung của SM và CN là đường thẳng EF

với $\overrightarrow{SE}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{CF}=\dfrac{8}{9}\overrightarrow{CN}$.

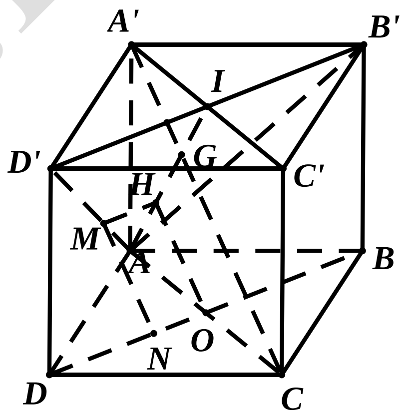
Lúc đó $\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{9}\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{9}\vec{c} \Rightarrow EF=\sqrt{\dfrac{4}{81}\vec{a}^2+\dfrac{4}{81}\vec{b}^2+\dfrac{4}{81}\vec{c}^2}=\dfrac{a}{3}$.

Vậy $d(CN,SM)=EF=\dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Do $\begin{cases} BD \,//\, B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do

$\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A,G,I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH \,//\, CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD',BD)=MN$.

Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

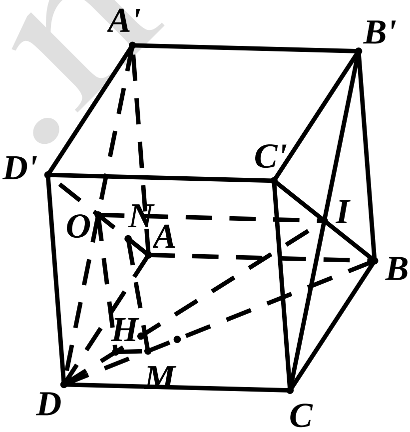
Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

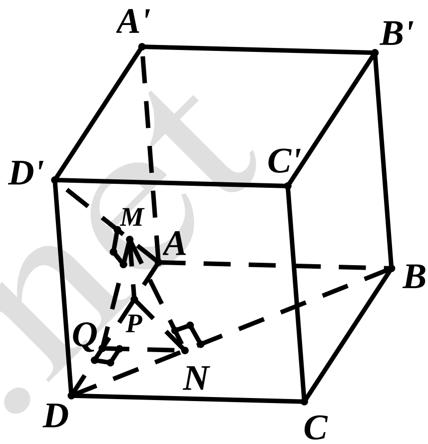
Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Chon $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.



Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên



$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d\left(AD', BD\right) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

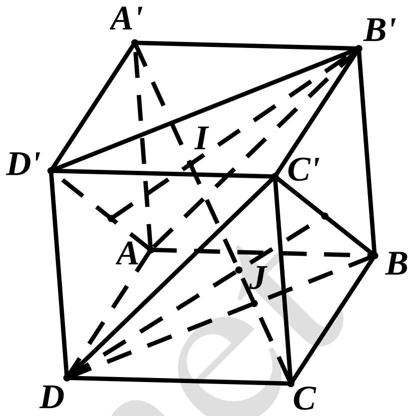
Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$; $AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.

Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên $QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó $MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') /\!/ (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC'))$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'), (BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dạng chứng minh được $A'C \perp (AB'D'), A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ

$\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

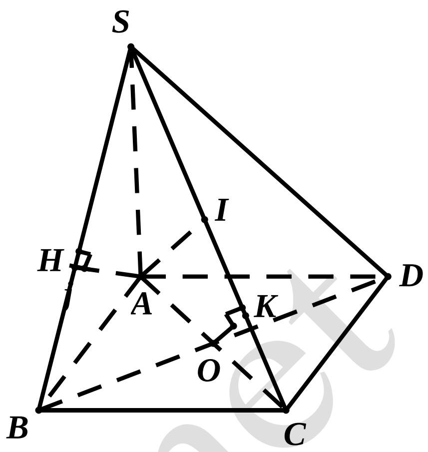
Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

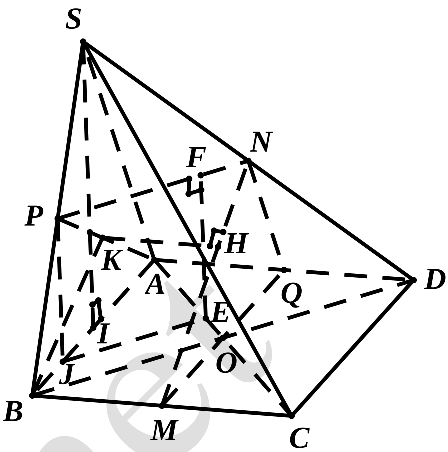
Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.



a) Trong (SAB) kẻ $PJ // SI$, từ J kẻ $JE // BD, E \in AC$

Từ E kẻ $EF // PJ, F \in PN$.

Do $\begin{cases} PJ // SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

$\Rightarrow PJ \perp AC \ (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN // BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC,PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ // AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ // (SAB)$.

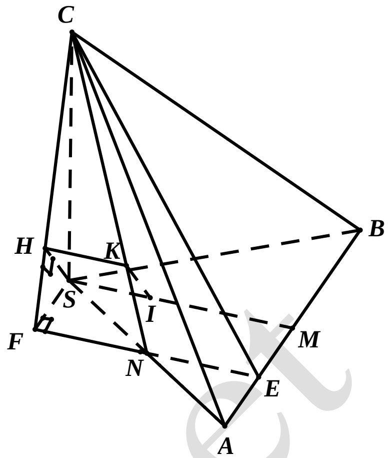
Tương tự $NQ // SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ // (SAB)$.

Vậy $(MNQ) // (SAB) \Rightarrow NM // (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN,AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $SABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN .Cho tam giác ABC, dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.

Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM // NE \end{cases} \Rightarrow SM // (CNE)$, do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì $\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$

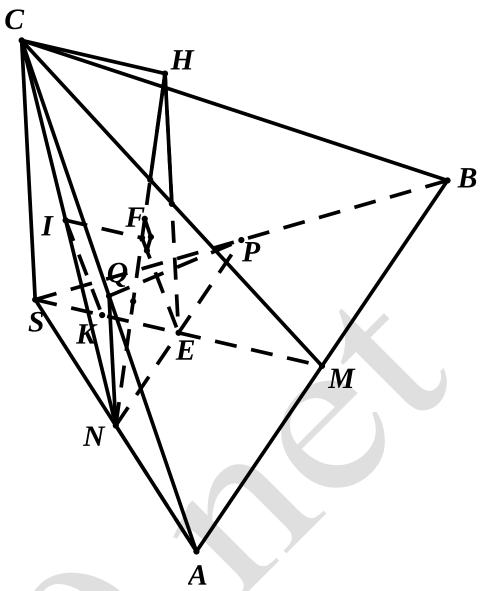
Trong (CSF) kẻ $SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

Ta có $SF = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SF^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $d(SM, CN) = IK = SH = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.

Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ).Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

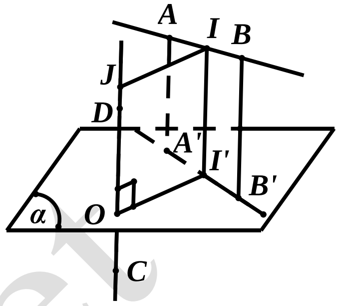
Bài toán 04: ỨNG DỤNG PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O. Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I \in AB, J \in CD$)

Xét phép chiếu vuông góc lên (α), Gọi A', B', I' là hình chiếu của A, B, I thì $IJ = OI'$, từ đó $d(AB, CD) = d(O, A'B')$.



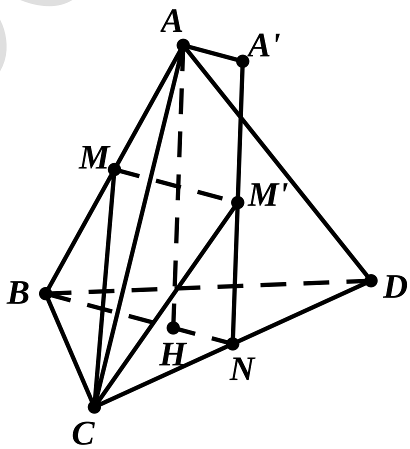
Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH \perp (BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha) \perp BN$. Xét phép chiếu vuông góc lên (α), gọi $A', B', C', D', H', M', N'$ lần lượt là ảnh của A, B, C, D, H, M, N thì $B' \equiv N' \equiv H' \equiv N$, $C' \equiv C, D' \equiv D$.



Ta có $d(CM, CD) = d(N, CM')$.

$$BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$NM' = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Tam giác NCM' vuông tại N nên $\dfrac{1}{d^2\left(N,CM'\right)}=\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{NM'^2}$

$$=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{10}{a^2}\Rightarrow d\left(N,CM'\right)=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d\left(CM,BN\right)=d\left(N,CM'\right)=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC.

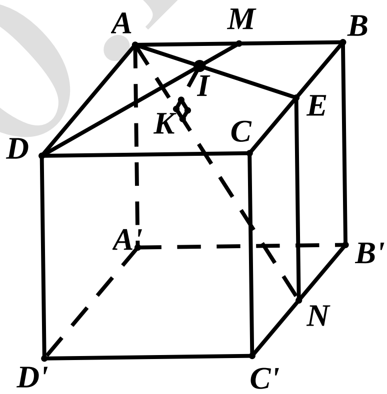
Dễ thấy $\Delta ADM=\Delta BAE$ nên $AMD=AEB$, mà

$AEB+BAE=90^0\Rightarrow AMD+BAE=90^0$

$\Rightarrow DM\perp AE$. Lại có

$EN\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow EN\perp DM$ do đó

$\left(AEN\right)\perp DM$ tại I.



Xét phép chiếu vuông góc lên $\left(ANE\right)$, ta có AN chính là hình chiếu của nó nên $d\left(DM,AN\right)=d\left(I,AN\right)$

Gọi K là hình chiếu cuả I trên AN thì $d\left(I,AN\right)=IK$.

Ta có $\Delta AKI\sim\Delta AEN$, suy ra

$$\frac{IK}{EN}=\frac{AI}{AN}\Rightarrow IK=\frac{AI.EN}{AN}\quad(1)$$

$$AN^2=AE^2+EN^2=AB^2+BE^2+EN^2=\frac{9a^2}{4}\Rightarrow AN=\frac{3a}{2}.$$

$$\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Thay vào (1) ta được $IK=\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d\left(DM,AN\right)=\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

64. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC

b) AI và OC

65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA\perp(ABC)$ và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, $AC=AD=4cm$, $AB=3cm$, $BC=5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2002)

67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A,B sao cho $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC,BD cùng vuông góc với Δ và $AC=BD=AB$. Xác định điểm O cách đều các điểm A,B,C,D và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a, AC=b, AD=c$ và $BAC=CAD=DAB=60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

69. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=3a$ và $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC có $AB=BC=2a$, góc $ABC=120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2008)

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA=BC=a, AD=2a$. Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2007)

72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC = a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD).

b) Từ A đến (SBC).

74. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$, $AC = 4, BD = 2, SO = \sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

76. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c$. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN \perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi ĐH Khối B Năm 2007)

78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh $SA \perp (ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

80. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB \perp MA'$ và tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP CHƯƠNG

81. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Mặt phẳng $(A'MC)$ cắt cạnh $C'D'$ tại N.

a) Tứ giác $A'MCN$ là hình gì? Chứng minh $MN \perp CB'$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên MN. Tìm tập hợp điểm H.

82. Cho ba tia Ox,Oy,Oz đôi một vuông góc và các điểm A,B,C lần lượt nằm trên ba tia đó sao cho $OA = OB + OC = 1$.

a) Chứng minh tổng diện tích tất cả các mặt của tứ diện $OABC$ không đổi.

b) Tính tổng các góc $OBA + ABC + OCB$.

83. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của cạnh AB. Tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với $B'C$.

84. Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC.

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua MN song song với SB.

85. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,C'D'$ của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

a) MN và $C'D'$.

b) BD và AD'.

c) MN và AP.

86. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{2}a$. Cạnh $SC = a$ và vuông góc với đáy . Gọi D,E lần lượt là trung điểm của AB,BC. Tính góc giữa hai đường thẳng CD và SE.

87. Cho hai nửa đường thẳng Ax,By chéo nhau , vuông góc với nhau và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M,N lần lượt di động trên Ax,By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh:

a) Tam giác OAB là tam giác tù.

b) Chứng minh khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M,N di động.

88. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = b, BC = c$ và các cạnh còn lại bằng a. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

b) Tìm điểm M trên IJ sao cho $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

89. Cho từ diện $D.ABC$. Gọi $A'B'C'$ theo thứ tự là các điểm trên DA,DB,DC sao cho $DA'.DA = DB'.DB = DC'.DC$, H là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ và I là giao điểm của DH với mặt phẳng (ABC). Một điểm M di động trong tam giác ABC, đường thẳng Δ đi qua M cùng phương (song song hoặc trùng) với ID lần lượt cắt các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$ tại MNQ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}.$$