KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm tại một điểm

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$, được gọi là có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$ nếu giới hạn sau tồn tại (hữu hạn): $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ và giá trị của giới hạn đó gọi là giá trị đạo hàm của hàm số tại điểm x_0.Ta kí hiệu $f'(x_0)$.

Vậy $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

$f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. $\qquad f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Hệ quả : Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow \exists\, f(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

4. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Định lí: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0.

Chẳng hạn: Xét hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không liên tục tại điểm đó.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$, còn $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp:

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Lời giải.

1. Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24 \Rightarrow f'(2) = 24$.

2. Ta có : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Ta có $f(0) = 0$, do đó:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Vậy $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải.

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x}{x-1}=1$

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}2=2$

$\Rightarrow f'(-1^+)\neq f'(-1^-)\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

Lời giải.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=2x+1$ tại $x_0=1$

2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$

3. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $x_0=2$

4. $f(x)=\sin^2 x$ tại $x=\dfrac{\pi}{2}$

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Bài 2 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\sin 2x$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

2. $f(x)=\tan x$ tại $x=\dfrac{\pi}{4}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$ tại $x=0$.

Bài 3 Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm chỉ ra

1. $f(x)=x^3$ tại $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x\geq 1 \\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ tại $x_0=1$.

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0 \\ x+x^2 & \text{khi } x\leq 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

Bài 4

1. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x\geq 1 \\ ax+b & \text{khi } x<1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

2. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\geq 0 \\ 2x^2+ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

3. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\geq 0 \\ ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.