HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Các công thức lượng giác

1. Các hằng đẳng thức:

* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ với mọi α

* $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ với mọi $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$

* $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ với mọi $\alpha \neq k2\pi$

* $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ với mọi $\alpha \neq k\pi$

2. Hệ thức các cung đặc biệt

a.Hai cung đối nhau: α *và* $-\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

b. Hai cung phụ nhau: α *và* $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$ $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$

c. Hai cung bù nhau: α *và* $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

d) Hai cung hơn kém nhau $\pi : \alpha$ *và* $\pi + \alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

3. Các công thức lượng giác

a. Công thức cộng

$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$ $\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \cos a.\sin b$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

b) Công thức nhân

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

c. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

d. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$.

e. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\qquad$ $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$ $\qquad$ $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$.

II. Tính tuần hoàn của hàm số

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$$x \pm T \in D \text{ và } f(x+T) = f(x).$$

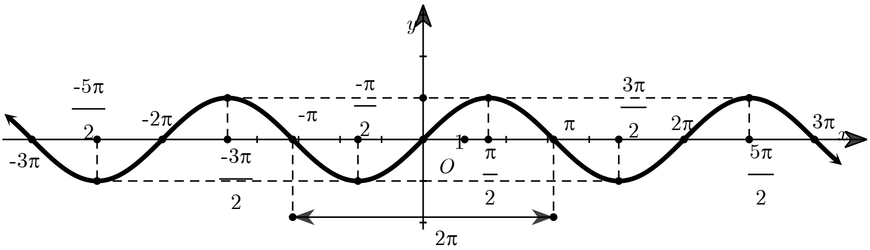
Nếu có số T ***dương nhỏ nhất*** thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là ***hàm số tuần hoàn với chu kì*** T.

III. Các hàm số lượng giác

1. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = R$
- Tập giác trị: $[-1;1]$, tức là $-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in R$
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi)$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

• Đồ thị hàm số $y = \sin x$.



2. Hàm số $y = \cos x$

• Tập xác định: $D = R$

• Tập giác trị: $[-1;1]$, tức là $-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in R$

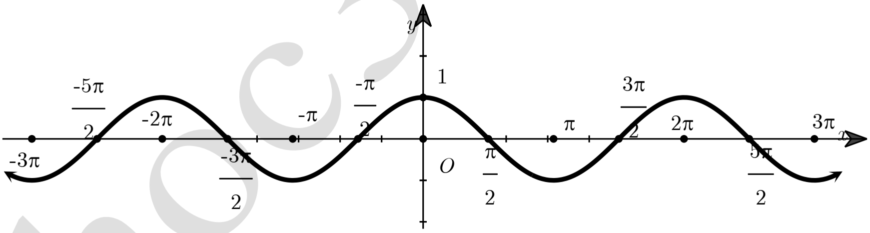
• Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$.

• Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

• Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

• Đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo véc tơ $\vec{v} = (-\frac{\pi}{2}; 0)$.



3. Hàm số $y = \tan x$

• Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

• Tập giá trị: $\mathbb{R}$

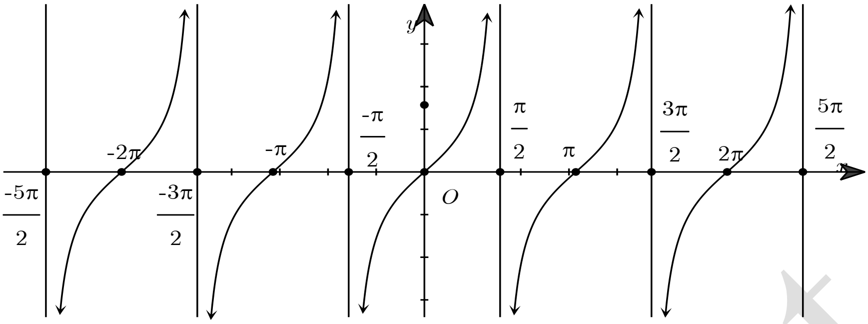
• Là hàm số lẻ

• Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

• Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

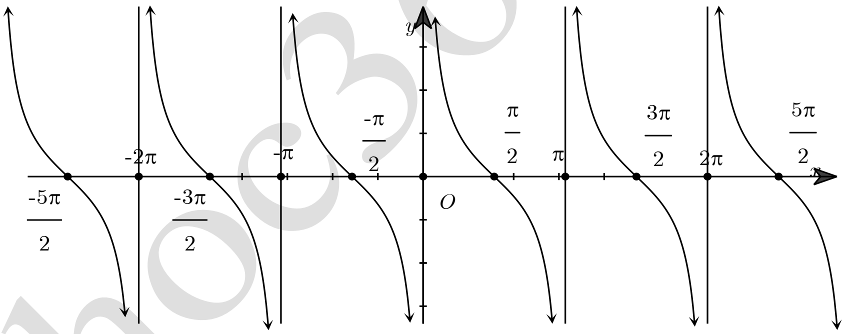
• Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.

- Đồ thị



4. Hàm số $y=\cot x$

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$
- Hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- Đồ thị



B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Phương pháp .

- Hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x)\ge 0$ và $f(x)$ tồn tại
- Hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x)\ne 0$ và $f(x)$ tồn tại.

- $\sin u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $-1 \leq \sin x,\ \cos x \leq 1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \tan(x - \frac{\pi}{6})$ **2.** $y = \cot^2(\frac{2\pi}{3} - 3x)$

Lời giải.

1. Điều kiện: $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Điều kiện: $\sin(\frac{2\pi}{3} - 3x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot(3x + \frac{\pi}{6})$ **2.** $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

Lời giải.

1. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin(3x + \frac{\pi}{6}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Ta có: $\sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \end{cases}$

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{2}+n2\pi, -\frac{\pi}{14}+\frac{2m\pi}{7}\right\}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \frac{1-\sin 2x}{\cos 3x - 1}$

2. $y = \sqrt{\frac{1-\cos 3x}{1+\sin 4x}}$

3. $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$

4. $y = \sqrt{\frac{1+\cot^2 x}{1-\sin 3x}}$

Bài 2 Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \frac{1}{\sin 2x - \cos 3x}$

2. $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x}$

3. $y = \frac{\cot x}{2\sin x - 1}$

4. $y = \tan(x - \frac{\pi}{4}).\cot(x - \frac{\pi}{3})$

Bài 3 Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$

2. $y = \tan 3x.\cot 5x$

3. $y = \sqrt{\frac{2+\sin x}{\tan^2 x}}$

4. $y = \tan 3x + \cot(x + \frac{\pi}{3})$

5. $y = \frac{\sin 3x}{\sin 8x - \sin 5x}$

6. $y = \frac{\tan 4x}{\cos 4x + \sin 3x}$

Vấn đề 2. Tính chất của hàm số và đồ thị hàm số

Phương pháp .

Cho hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì T

* Để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số, ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên một đoạn có độ dài bằng T sau đó ta tịnh tiến theo các véc tơ $k.\vec{v}$ (với $\vec{v} = (T;0)$, $k \in \mathbb{Z}$) ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

* Số nghiệm của phương trình $f(x) = k$, (với k là hằng số) chính bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = k$.

* Nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge 0$ là miền x mà đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm trên trục Ox.

Chú ý:

• Hàm số $f(x)=a\sin ux+b\cos vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|(u,v)|}$ ((u,v) là ước chung lớn nhất).

• Hàm số $f(x)=a.\tan ux+b.\cot vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{|(u,v)|}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1.

Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở của các hàm số : $f(x)=\cos\dfrac{3x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}$

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\cos x+\cos 2x\right)\Rightarrow$ hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở $T_0=2\pi$.

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở (nếu có) của các hàm số sau.

1. $f(x)=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$ **2.** $f(x)=\sin x^2$

Lời giải.

1. Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn $\Rightarrow$ có số thực dương T thỏa

$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\cos(x+T)+\cos\sqrt{3}(x+T)=\cos x+\cos\sqrt{3}x$

Cho $x=0\Rightarrow\cos T+\cos\sqrt{3}T=2\Leftrightarrow\begin{cases}\cos T=1\\ \cos\sqrt{3}T=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}T=2n\pi\\ \sqrt{3}T=2m\pi\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{m}{n}$ vô lí, do $m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{m}{n}$ là số hữu tỉ.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

2. Giả sử hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn

$\Rightarrow\exists T>0:f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)^2=\sin x^2\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Cho $x=0\Rightarrow\sin T^2=0\Leftrightarrow T^2=k\pi\Rightarrow T=\sqrt{k\pi}$

$\Rightarrow f(x+\sqrt{k\pi})=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=\sqrt{2k\pi}$ ta có: $f(\sqrt{2k\pi})=\sin\left(\sqrt{k2\pi}\right)^2=\sin(k2\pi)=0$.

$f(x+\sqrt{k\pi})=\sin\left(\sqrt{k2\pi}+\sqrt{k\pi}\right)^2=\sin\left(3k\pi+2k\pi\sqrt{2}\right)=\pm\sin(2k\pi\sqrt{2})$

$\Rightarrow f(x+\sqrt{k\pi}) \neq 0$.

Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số tuần hoàn.

Ví dụ 3. Cho a,b,c,d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=a\sin cx+b\cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Lời giải.

* Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn $\Rightarrow \exists T>0:\ f(x+T)=f(x)\ \ \forall x$

Cho $x=0, x=-T \Rightarrow \begin{cases} a\sin cT+b\cos dT=b \\ -a\sin cT+b\cos dT=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos dT=1 \\ \sin cT=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} dT=2n\pi \\ cT=m\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{m}{2n}\in \mathbb{Q}$.

* Giả sử $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \exists k,l\in\mathbb{Z}:\ \frac{c}{d}=\frac{k}{l}$. Đặt $T=\frac{2\pi k}{c}=\frac{2l\pi}{d}$

Ta có: $f(x+T)=f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi k}{c}=\frac{2l\pi}{d}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1, T_2. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x)\pm g(x);\ f(x).g(x)$ là những hàm số tuần hoàn.

Lời giải.

Vì $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ nên tồn tại hai số nguyên $m,n; n\neq 0$ sao cho

$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n} \Rightarrow nT_1=mT_2=T$

Khi đó $f(x+T)=f(x+nT_1)=f(x)$ và $g(x+T)=g(x+mT_2)=g(x)$

Suy ra $f(x+T)\pm g(x+T)=f(x)\pm g(x)$ và $f(x+T).g(x+T)=f(x).g(x)$,

$\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:

1. Hàm số $f(x)=a\sin ux+b\cos vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{(u,v)}$ ((u,v) là ước chung lớn nhất).

2. Hàm số $f(x)=a.\tan ux+b.\cot vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{(u,v)}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở T_0.

1. $f(x)=\sin x$, $T_0=2\pi$

2. $f(x)=\tan 2x$, $T_0=\frac{\pi}{2}$.

Bài 2 Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở (nếu có) của các hàm số sau.

1. $y=\sin 2x+\sin x$

2. $y=\tan x.\tan 3x$

3. $y=\sin 3x+2\cos 2x$

Bài 3 Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

1. $y=\sin 2x+\sin x$

2. $y=\tan x.\tan 3x$

3. $y=\sin 3x+2\cos 2x$

4. $y=\sin\sqrt{x}$

Vấn đề 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

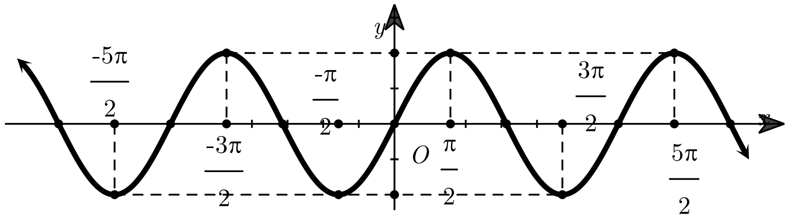
Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y=2\sin x$

Lời giải.

Hàm số $y=2\sin x$

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$
- Hàm số $y=2\sin x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y=2\sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$.
- Đồ thị hàm số đi quan các điểm $(k\pi;0)$, $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;2\right)$.

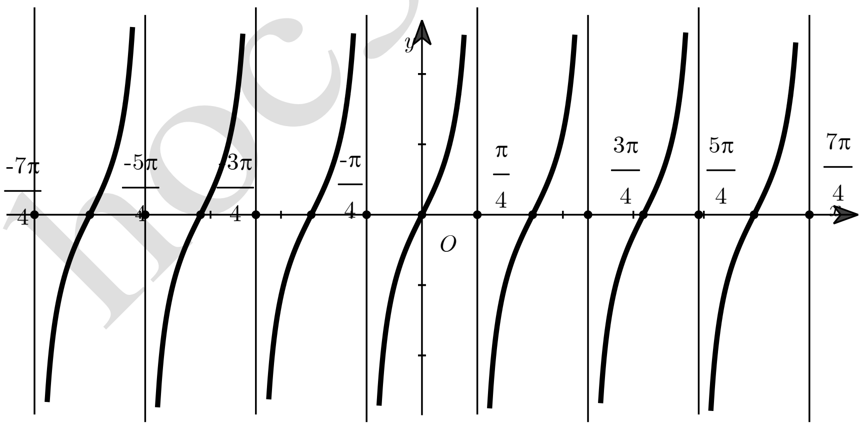


Ví dụ 2 Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y = \tan 2x$

Lời giải.

Hàm số $y = \tan 2x$

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{2}$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$.
- Các đường tiệm cận: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
- Đồ thị hàm số đi quan các điểm $(\frac{k\pi}{2};0)$.



Ví dụ 2 Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y = 1 + 2\cos^2 x$

Lời giải.

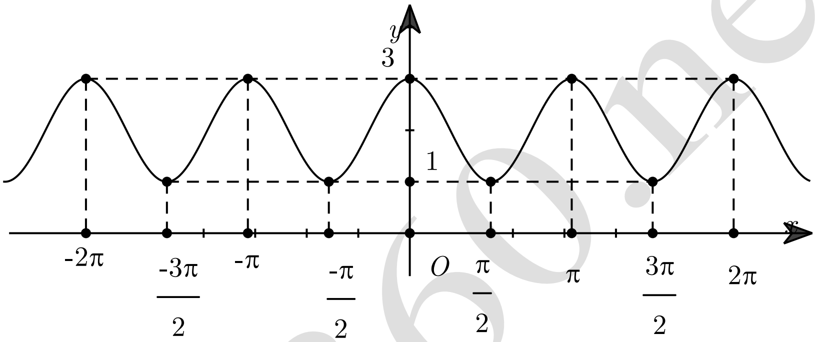
Hàm số $y = 1 + 2\cos^2 x$

Ta có: $y = 2 + \cos 2x$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Hàm số $y = 2 + \cos 2x$ là hàm số chẵn
- Hàm số $y = 2 + \cos 2x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi

khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

- Đồ thị hàm số đi quan các điểm $(\frac{k\pi}{2};1)$, $\left(\pi + k\pi; 3\right)$.



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số $y = \sin 2x$

Bài 2: Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số $y = 2|\cos x|$

Vấn đề 4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 4\sin x\cos x + 1$ **2.** $y = 4 - 3\sin^2 2x$

Lời giải.

1 Ta có $y = 2\sin 2x + 1$.

Do $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin 2x \le 2 \Rightarrow -1 \le 2\sin 2x + 1 \le 3$

$\Rightarrow -1 \le y \le 3$.

* $y = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

* $y = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

2. Ta có: $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 4 - 3\sin^2 x \le 4$

* $y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

* $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 2. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 6\cos^2 x + \cos^2 2x$ **2.** $y = (4\sin x - 3\cos x)^2 - 4(4\sin x - 3\cos x) + 1$

Lời giải.

1. Ta có: $y = 6\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 = 4\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow t \in [0;1]$. Khi đó $y = 4t^2 + 2t + 1 = f(t)$

t	0	1
f(t)	1 ↗	7

Vậy $\min y = 1$ đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\max y = 1$ đạt được khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$

2. Đặt $t = 4\sin x - 3\cos x \Rightarrow -5 \le t \le 5\ \forall x \in \mathbb{R}$

Khi đó: $y = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$

Vì $t \in [-5;5] \Rightarrow -7 \le t - 2 \le 3 \Rightarrow 0 \le (t-2)^2 \le 49$

Do đó $-3 \le y \le 46$

Vậy $\min y = -3;\ \max y = 46$.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau chỉ nhận giá trị dương : $y = (3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x + 2m - 1$

Lời giải.

Đặt $t = 3\sin x - 4\cos x \Rightarrow -5 \le t \le 5$

Ta có: $y = t^2 - 2t + 2m - 1 = (t-1)^2 + 2m - 2$

Do $-5 \le t \le 5 \Rightarrow 0 \le (t-1)^2 \le 36 \Rightarrow y \ge 2m - 2 \Rightarrow \min y = 2m - 2$

Hàm số chỉ nhận giá trị dương $\Leftrightarrow y > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min y > 0$

$\Leftrightarrow 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{2\sin^2 x+4\sin x\cos x-(3+2m)\cos^2 x+2}$ xác định với mọi x

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi x

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+4\sin x\cos x-(3+2m)\cos^2 x+2\ge 0\ \ \forall x\in \mathbb{R}\quad (1)$

- $\cos x=0\Rightarrow (1)$ đúng
- $\cos x\ne 0$ khi đó ta có: $(1)\Leftrightarrow 2\tan^2 x+4\tan x-(3+2m)+2(1+\tan^2 x)\ge 0$

$\Leftrightarrow 4\tan^2 x+4\tan x\ge 1+2m\ \ \forall x\in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2\tan x+1)^2\ge 2+2m\ \ \forall x\in \mathbb{R}\Leftrightarrow 2+2m\le 0\Leftrightarrow m\le -1$

Ví dụ 5. Cho các góc nhọn x,y thỏa mãn $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin(x+y)\ \ (*)$.

Chứng minh rằng: $x+y=\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải.

Ta có hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Và $x,y,\dfrac{\pi}{2}-x,\dfrac{\pi}{2}-y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Giả sử $x+y>\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{\pi}{2}-y\\ y>\dfrac{\pi}{2}-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ \sin y>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

Suy ra: $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y$

$>\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(x+y)$

Mâu thuẫn với $(*)$

- Giả sử $x+y<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x<\dfrac{\pi}{2}-y\\ y<\dfrac{\pi}{2}-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ \sin y<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

Suy ra: $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y$

$<\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(x+y)$

Mâu thuẫn với $(*)$

- Nếu $x+y=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy $(*) \Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 6. Tìm gtln và gtnn của các hàm sau :

1. $y=3\sin x+4\cos x+5$ **2.** $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

Lời giải.

1. Xét phương trình : $y=3\sin x+4\cos x+5$

$\Leftrightarrow 3\sin x+4\cos x+5-y=0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow 3^2+4^2\ge(5-y)^2 \Leftrightarrow y^2-10y\le 0 \Leftrightarrow 0\le y\le 10$

Vậy $\min y=0$; $\max y=10$.

2. Do $\sin x+\cos x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$

Xét phương trình : $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

$\Leftrightarrow (1-y)\sin x+(2-y)\cos x+1-2y=0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1-y)^2+(2-y)^2\ge(1-2y)^2$

$\Leftrightarrow y^2+y-2\le 0 \Leftrightarrow -2\le y\le 1$

Vậy $\min y=-2$; $\max y=1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y=\sqrt{2\sin x+3}$ **2.** $y=1-\sqrt{2\cos^2 x+1}$

3. $y=1+3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ **4.** $y=3-2\cos^2 3x$

5. $y=1+\sqrt{2+\sin 2x}$ **6.** $y=\frac{4}{1+2\sin^2 x}$

Bài 2 Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y=2\sin^2 x+\cos^2 2x$ **2.** $y=3\sin x+4\cos x+1$

3. $y=3\sin x+4\cos x-1$ **4.** $y=2\sin^2 x+3\sin 2x-4\cos^2 x$

5. $y=\sin^2 x+3\sin 2x+3\cos^2 x$

6. $y=2\sin 3x+1$ **7.** $y=3-4\cos^2 2x$

8. $y=1+2\sqrt{4+\cos 3x}$ **9.** $y=4\sin 6x+3\cos 6x$

10. $y=\frac{3}{1+\sqrt{2+\sin^2 x}}$ **11.** $y=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}$

Bài 3 Chứng minh đẳng thức sau: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

Trong đó $\alpha\in[0;2\pi]$ và a,b không đồng thời bằng 0.

Bài 4 Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 2\cos(3x - \frac{\pi}{3}) + 3$

2. $y = \sqrt{3 - 2\sin^2 2x} + 4$

3. $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$

4. $y = \tan^2 x - 4\tan x + 1$

5. $y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1$

Bài 5 Tìm m để hàm số $y = \sqrt{5\sin 4x - 6\cos 4x + 2m - 1}$ xác định với mọi x.

Bài 6 Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 2 + 3\sin 3x$

2. $y = 1 - 4\sin^2 2x$

3. $y = 1 + \sqrt{3 + 2\sin x}$

4. $y = 3 + 2\sqrt{2 + \sin^2 4x}$

5. $y = 4\sin 3x - 3\cos 3x + 1$

6. $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x + 4$

7. $y = \dfrac{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}{2\sin 2x - \cos 2x + 4}$

8. $y = \dfrac{2\sin^2 3x + 4\sin 3x\cos 3x + 1}{\sin 6x + 4\cos 6x + 10}$

9. $y = 3\cos x + \sin x - 2$

10. $y = \dfrac{\sin^2 2x + 3\sin 4x}{2\cos^2 2x - \sin 4x + 2}$

11. $y = 3(3\sin x + 4\cos x)^2 + 4(3\sin x + 4\cos x) + 1$

Bài 7 Tìm m để các bất phương trình sau đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

1. $(3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x \geq 2m - 1$

2. $\dfrac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} \leq m + 1$

3. $\dfrac{4\sin 2x + \cos 2x + 17}{3\cos 2x + \sin 2x + m + 1} \geq 2$.

Bài 8 Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x + y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{\sin^4 x}{y} + \dfrac{\cos^4 y}{x}$.

Bài 9 Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ lớn hơn -1.