HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Định nghĩa

• Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$

1) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$

2) Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0

• $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó kiên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

• $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ nếu nó liên tục trên $\left(a;b\right)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)=f(b)$.

2. Các định lý cơ bản.

Định lý 1 :

a) Hàm số đa thức liên tục trên tập R

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lý 2. Các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó tổng, hiệu, tích liên tục tai x0, thương $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục nếu $g(x_0)\neq 0$.

Định lý 3. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Nếu $f(a)\neq f(b)$ và M là một số nằm giữa $f(a)$,$f(b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in\left(a;b\right)$ sao cho $f(c)=M$

<u>**Hệ quả**</u>: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Nếu $f(a)\,f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in\left(a;b\right)$ sao cho $f(c)=0$.

Chú ý : Ta có thể phát biểu hệ quả trên theo cách khác như sau :

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu $f(a)\,f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

• Tìm giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ và tính $f(x_0)$

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

3. Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = k$.

4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x < x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to x_0^+} f_1(x) = \lim_{x\to x_0^-} f_2(x) = f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to x_0} f(x) = k$.
- Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > x_0 \\ g(x) & \text{khi } x \leq x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x = 3$

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x \neq 3 \\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x < 3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$

Lời giải.

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3) = \dfrac{10}{3}$ và $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+2} = \frac{27}{5} \neq f(3).$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x = 3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$;

$$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ 1 & \text{khi } x=-1\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(2-x)=3$$

$$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right) = 4a+3 = f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3=1 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$ tại $x=4$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$ tại $x=1$ và $x=-1$.

Bài 2. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số sau liên tục tại điểm $x=0$.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Bài 4. Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra

1. $f\left(x\right)=\begin{cases} x+2a \text{ khi } x<0 \\ x^2+x+1 \text{ khi } x\ge 0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Phương pháp: Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …

Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$ **2.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Lời giải.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-3x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>1 \\ x\neq 2\end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $\left(1;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{a^2\left(x-2\right)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi} x<2 \\ \left(1-a\right)x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Với $x<2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x>2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x=2$ ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-a)x=2(1-a)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^-} a^2(\sqrt{x+2}+2)=4a^2$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 4a^2=2(1-a)\Leftrightarrow a=-1, a=\frac{1}{2}$.

Vậy $a=-1, a=\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xác định tính liên tục của hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$ **2.** $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$ **3.** $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$

Bài 2 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \frac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

Bài 3 Xét tính liên tục hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\le 0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ **4.** $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1 & \text{khi } |x|\le 1\\ 3x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$.

Bài 4. Xác định a,b để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } |x|\le \frac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{khi } |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\ne 0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Bài 5. Tìm m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp :

• Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.

• Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm.

1. $x^5+3x+1=0$ **2.** $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$

Lời giải.

1. Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1\Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1,x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow \left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0 \quad (1)$

Do $A=\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên $(1)\Leftrightarrow x_1=x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

2. Điều kiện: $x \le \frac{3}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3 + 2x - 3\sqrt{3-2x} - 4 = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 3\sqrt{3-2x} - 4$ liên tục trên $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

$f(0) = -4 - 3\sqrt{3} < 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8} > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_1^3 - x_2^3\right) + 2(x_1 - x_2) - 3\left(\sqrt{3-2x_1} - \sqrt{3-2x_2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\underbrace{\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2x_1} + \sqrt{3-2x_2}}\right)}_{B} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

(Vì $B = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2x_1} + \sqrt{3-2x_2}} > 0$)

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm :

1. $x^7 + 3x^5 - 1 = 0$ **2.** $x^2\sin x + x\cos x + 1 = 0$

Lời giải.

1. Ta có hàm số $f(x) = x^7 + 3x^5 - 1$ liên tục trên R và $f(0).f(1) = -3 < 0$

Suy ra phương trinh $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

2. Ta có hàm số $f(x) = x^2\sin x + x\cos x + 1$ liên tục trên R và $f(0).f(\pi) = -\pi < 0$.

Suy ra phương trinh $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2 = \left(3x^2 + x + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0 \quad (1)$

Hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{32} < 0$

$f(0) = 1 > 0, f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$(-2;-1)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;2)$, $(2;10)$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt

1. $x^3 - 3x + 1 = 0$ **2.** $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m(x-1)^3(x+2) + 2x + 3 = 0$ **2.** $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$

3. $m(x-a)(x-c) + n(x-b)(x-d) = 0 \quad$ **(**$a \le b \le c \le d$**).**

Bài 3 Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số thực bất kỳ thoả mãn $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình :

1. $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

2. $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

3. $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$; $a, b, c > 0$ có hai nghiệm phân biệt.

4. $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m

5. $m^2.(x-2) + m(x-1)^3.(x-2)^4 + 3x - 4 = 0$ có nghiệm với mọi m.

Bài 5 . Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n < m;\ mp < n^2$ và $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 6.

1. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục.Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c\ge 0$ sao cho $f(c)=c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ thỏa: $f(3x)=f(x)$.

4. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa $f(0)=f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a ;b] và n điểm $x_1;x_2;...;x_n\in[a;b]$.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c\in[a;b]$ sao cho

$nf(c)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0<\alpha<\beta<1$ sao cho

$$\cos\alpha=\alpha^2 \text{ và } \beta\tan\beta=1.$$