HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

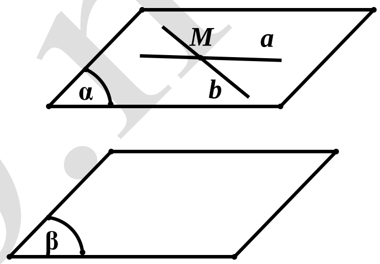
1. Định nghĩa.

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu $(\alpha)/\!/(\beta)$.

Vậy $(\alpha)/\!/(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)\cap(\beta)=\varnothing$.

2. Định lý và tính chất.

- Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha)/\!/(\beta)$.



Vậy $\begin{cases} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b=M \\ a/\!/(\beta), b/\!/(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)/\!/(\beta)$.

- Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1

Nếu $d/\!/(\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

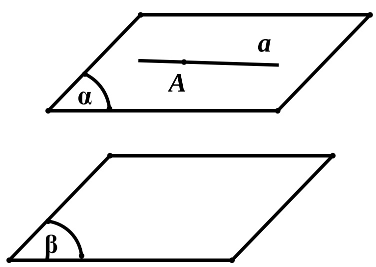
Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.

Hệ quả 3

Cho điểm không nằm trên mặt phẳng (α).Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằn trong mặt phẳng qua A song song với (α).

Vậy $\begin{cases} A\notin(\alpha), A\in(\beta) \\ A\in d \\ d/\!/(\alpha) \\ (\beta)/\!/(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d\subset(\beta)$.



- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

Vậy $\begin{cases}(\alpha)\,/\!/\,(\beta)\\(\delta)\cap(\alpha)=a\end{cases}\Rightarrow(\delta)\cap(\beta)=b\,/\!/\,a$.

Hệ quả

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

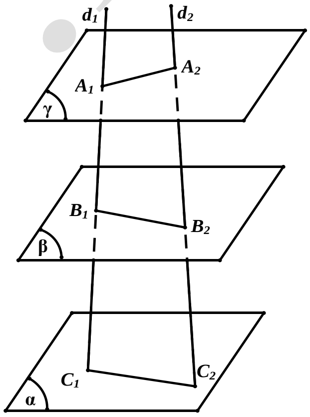
3. Định lí Ta-lét (Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases}(\alpha)\,/\!/\,(\beta)\,/\!/\,(\chi)\\d_1\cap(\alpha)=A_1,d_1\cap(\beta)=B_1,d_1\cap(\chi)=C_1\\d_2\cap(\alpha)=A_2,d_2\cap(\beta)=B_2,d_2\cap(\chi)=C_2\end{cases}\Rightarrow\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

Định lí Ta-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1,d_2 chéo nhau và các điểm A_1,B_1,C_1 trên d_1, các điểm A_2,B_2,C_2 trên d_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 cùng song song với một mặt phăng.



4. Hình lăng trụ và hình chóp cụt.

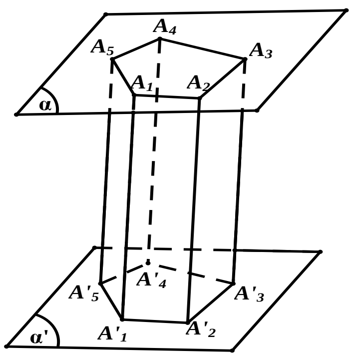
4.1. Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α').

Trên (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1,A_2,...,A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt (α') lần lượt tại $A_1^{'},A_2^{'},...,A_n^{'}$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1^{'}A_2^{'}...A_n^{'}$ và các hình bình hành $A_1A_1^{'}A_2^{'}A_2,A_2A_2^{'}A_3^{'}A_3,...,A_nA_n^{'}A_1^{'}A_1$ được gọi là hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1^{'}A_2^{'}...A_n^{'}$.

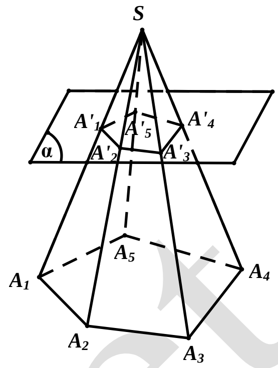
Lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



4.2. Hình chóp cụt.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Một mặt phẳng không đi qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh bên $SA_1, SA_2, .., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2', .. A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ cùng với các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1, A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt $A_1'A_2'...A_n'.A_1A_2...A_n$.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

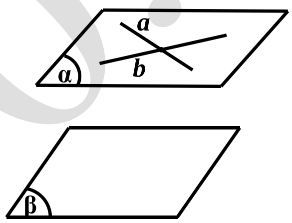
Bài toán 01: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG .

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng song song ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

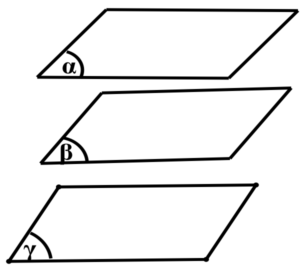
- Chứng minh trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ a \,//\, (\beta) \\ b \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta).$$



- Chứng minh hai mặt phẳng đó cùng song song với măt mặt phẳng thứ ba.

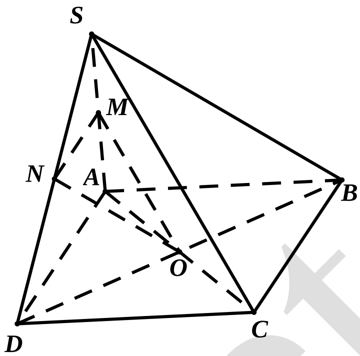
$$\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\gamma) \\ (\beta) \,//\, (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta).$$



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hìh chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Lời giải.



Ta có M,O lần lượt là trung điểm của SA, AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM // SC$.

Vậy $\begin{cases} OM // SC \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM // (SBC)\ (1)$.

Tương tự, Ta có N,O lần lượt là trung điểm của SD, BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $OM//SB$.

Vậy $\begin{cases} ON // SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM // (SBC)\ (2)$

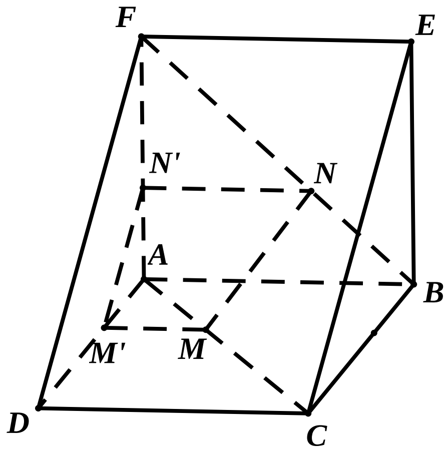
Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} OM // (SBC) \\ ON // (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC)$.

Ví dụ 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) // (BCE)$.

b) $(DEF) // (MM'N'N)$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} AD // BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD // (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF // BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF // (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) // (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hìnhvuông nên $AC = BF\ \ (1)$.

Ta có $MM' // CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}\ \ (2)$

$NN' // AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}\ \ (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' // DF$

$\Rightarrow DF // (MM'N'N)$.

Lại có $NN' // AB \Rightarrow NN' // EF \Rightarrow EF // (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF // (MM'N'N) \\ EF // (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) // (MM'N'N)$.

Bài toán 02: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA (α) VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT (α) VỚI MỘT MẶT PHẲNG (β) CHO TRƯỚC..

Phương pháp:

- Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau.
- Khi $(\alpha) // (\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng (§3)

Sử dụng $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\beta) \cap (\gamma) = d \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = d' // d, M \in d'$.

- Tìm đường thẳng d mằn trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d, khi đó $(\alpha) // d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d.

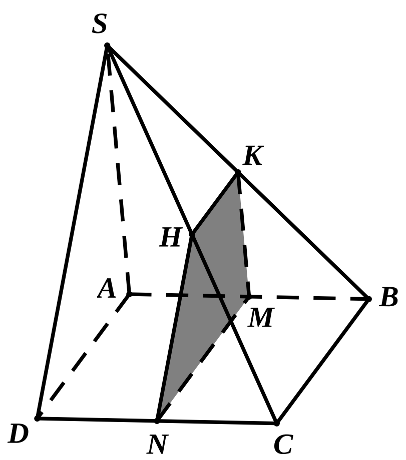
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK // SA, K \in SB$.



Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH // SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN // BC \Rightarrow MN // HK$. Vậy thiết diện là một hình thang .

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI = x$ $(0 < x < a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

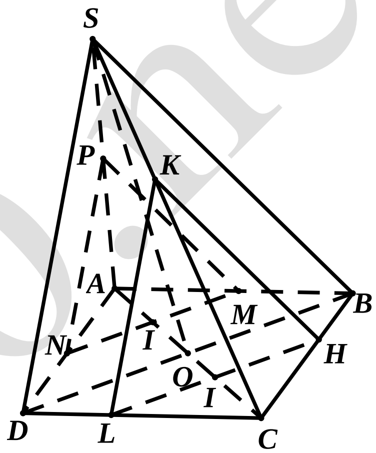
b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.

Lời giải.

a) ***Trường hợp 1.*** Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN // BD, I \in MN$.



Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP // SD, P \in SN$.

Thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \Rightarrow MP // SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases}$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như (hv).

b) ***Trường hợp 1.*** I thuộc đoạn OA

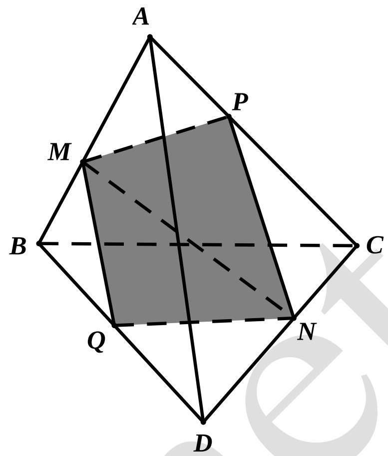
Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN // BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$$S_{MNP} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2 S_{BCD} = [\dfrac{2(a-x)}{a}]^2 \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Vậy $S_{td}=\begin{cases}\dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2};I\in(OA)\\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2};I\in(OC)\end{cases}$.



Bài toán 03: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ THALES.

Phương pháp:

Định lí Thales thừng được ứng dụng nhiều trong các bài toán tỉ số hay các bài toán chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng cố định.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Cho $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}>0$ và P là một điểm trên cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

c) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

Lời giải.

a) Do $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN,AC,BD cùng song song với một mặt phẳng (β).Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)/\!/(\beta)$suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

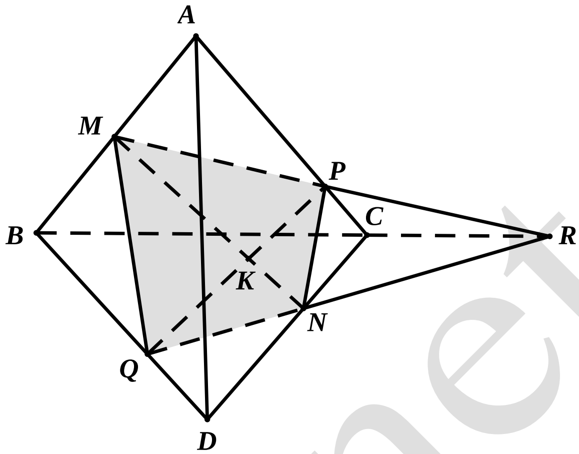
b) Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP/\!/BC$ nên $BC/\!/(MNP)$.

Ta có :

$$\begin{cases}N\in(MNP)\cap(BCD)\\ BC/\!/(MNP)\\ BC\subset(BCD)\end{cases}\Rightarrow(BCD)\cap(MNP)=NQ/\!/BC,Q\in BD.$$

Thiết diện là tứ giác $MPNQ$

.Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} \neq k$



Trong (ABC) gọi $R = BC \cap MP$

Trong (BCD) gọi

$Q = NR \cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K = MN \cap PQ$

Ta có $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}} = \dfrac{PK}{PQ}$.

Do $\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

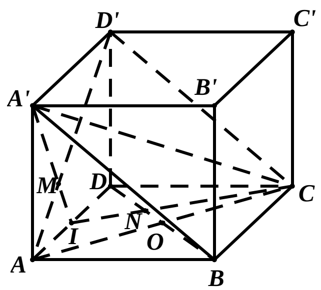
$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k \Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{PK + KQ} = \frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ} + 1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.

Lời giải.



a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB} \quad (1)$$

Vì các mặt của hình hộp là hình vuuong cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases} (Q) // (A'D'CB) \\ MN \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow MN // (A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có

$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}, \frac{IM}{IA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IM}{IA'} \Rightarrow MN // A'C$.

Bài toán 04: CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG THẲNG CÙNG NẰM TRONG MỘT MẶT PHẲNG HOẶC BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

- Để chứng minh các đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng ta chứng minh các đường thẳng đó cùng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng.
- Để chứng minh 4 điểm đồng phẳng ta chứng minh các điểm đó thuộc các đường thẳng mà các đường thẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng nào đó.
- Ngoài ra ta có thể sử dụng định lí **Menelaus** Trong không gian để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.

Định lí Menelaus

Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB,BC,CD,DA của tứ diện $ABCD$ (M,N,P,Q khác với A,B,C,D) thì M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA} = 1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh định lý Menelaus.

Lời giải.

Phần thuận.

Giả sử M,N,P,Q đồng phẳng. Từ các đỉnh A,B,C dựng các mặt phẳng $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ theo thứ tự song song với $(MNPQ)$.

Từ D dựng đường thẳng d cắt $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ theo thứ tự tại A',B',C' và cắt $(MNPQ)$ tại O.

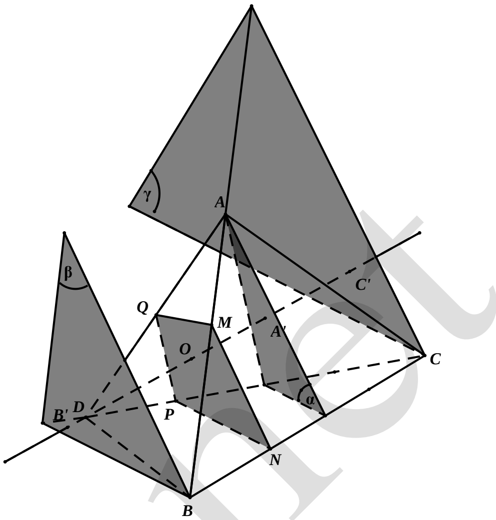
Ta có $\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$

Theo định lí Thales thì $\frac{OA'}{OB'}=\frac{MA}{MB}$

$\frac{OB'}{OC'}=\frac{NB}{NC},\frac{OC'}{OD}=\frac{PC}{PD},\frac{OD}{OA'}=\frac{QD}{QA}$

$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=$

$\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$.



Phần đảo.

Giả sử $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$. Gọi $E=(MNP)\cap AD$ theo chứng minh trên,do M,N,P,E đồng phẳng nên

$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{ED}{EA}=1 \Rightarrow \frac{QD}{QA}=\frac{ED}{EA} \Rightarrow E\equiv Q$.

Vậy M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB,SAC,SBC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.

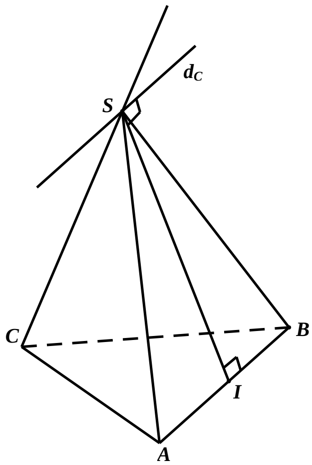
Gọi d_C là đường phân giác ngoài của góc S trong tam giác SAB và I là trung điểm của AB.

Do tam giác SAB cân tại S nên $SI\perp AB$ và SI là phân giác trong của góc S nên $SI\perp d_C$.

Vậy trong (SAB), ta có

$\begin{cases} d_C\perp SI \\ AB\perp SI \end{cases} \Rightarrow d_C \,//\, AB \Rightarrow d_C \,//\, (ABC)$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC).



Vậy $\begin{cases} S \in d_C \\ d_C \,//\, (ABC) \\ (\alpha) \,//\, (ABC) \\ S \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d_C \subset (\alpha)$.

Tương tự , gọi d_A, d_B là các đường phân giác ngoài góc S của các tam giác SBC, SCA thì d_A và d_B cũng nằm trong mặt phẳng (α) nên các đường thẳng d_A, d_B, d_C cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua S và song song với mặt phẳng (ABC).

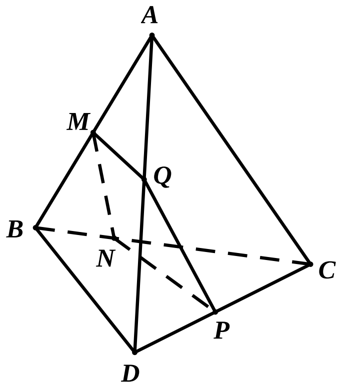
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (M,N,P,Q khác với các đỉnh của tứ diện) sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC}$ và $\frac{NB}{NC} = \frac{QA}{QD}$. Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PC}{PD} = 1 \quad (1)$

Tương tự $\frac{NB}{NC} = \frac{QA}{QD} \Rightarrow \frac{NB}{NC} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$ theo định lí Menelaus thì bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.



Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm S trong không gian (S không trùng với A,B,C,D). Gọi E,F,H,K lần lượt là chân các đường phân giác trong góc S của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Chứng minh bốn điểm E,F,H,K đồng phẳng.

Lời giải.

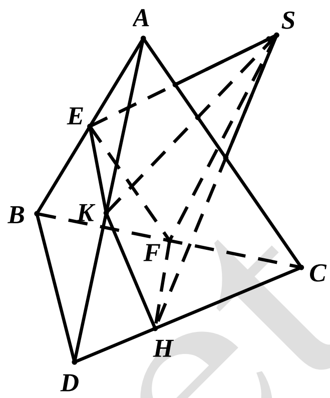
Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{EA}{EB}=\frac{SA}{SA},\frac{KD}{KA}=\frac{SD}{SA}$

$\frac{HC}{HD}=\frac{SC}{SD},\frac{FB}{FC}=\frac{SB}{SC}$

Suy ra $\frac{EA}{EB}.\frac{FB}{FC}.\frac{HC}{HD}.\frac{KD}{KA}$

$=\frac{SA}{SB}.\frac{SB}{SC}.\frac{SC}{SD}.\frac{SD}{SA}=1$ theo định lí Menelaus thì bốn điểm E,F,H,K đồng phẳng.



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD,SA.

a) Chứng minh $(SBN)//(DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S,P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

47. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN)//(SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ//(SAB)$.

48. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE,AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF//(SAD)$.

49. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD,AF tại M',N'.

a) Chứng minh $(BCE)//(ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF)//(MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M,N thay đổi trên AC và BF.

50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB=3a,AD=CD=a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA=2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD,BC,SC,SD theo thứ tự tại M,N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM \left(0 < x < a\right)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.
c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.
d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

51. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
a) Chứng minh $(BDA') // (B'D'C)$.
b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác $BDA', B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.
c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a .Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x\left(0 \le x \le a\right)$.
a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.
b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.
c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.
a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.
b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

55. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BB', BC$.
a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).
b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

56. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$
a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN // A'C$.

57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK) // (BB'C'C)$ và $(A'KG) // (AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

58. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

59. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x, AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM + AN$.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

60. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?

b) So sánh AM và NP.