HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt với hai mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow ((P),(Q)) = (a,b)$$

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^0.

Diện tích hình chiếu $S' = S\cos\varphi$

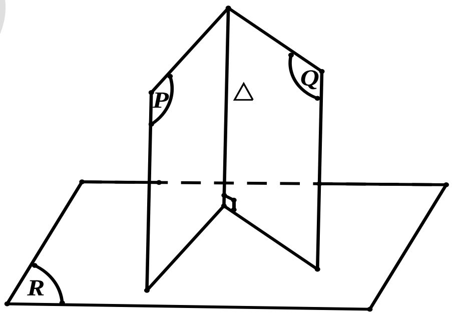
Trong đó S là diện tích đa giác nằm trong (P), S' là diện tích đa giác nằm trong (Q) còn φ là góc giữa (P) và (Q).

2. Hai mặt phẳng vuông góc.

2.1. Định nghĩa.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \left((P),(Q)\right) = 90^0.$$



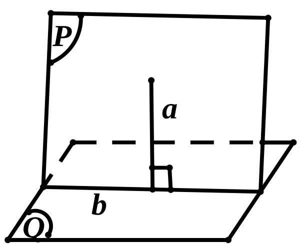
2.2. Tính chất.

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng và vuông góc với giao tyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$



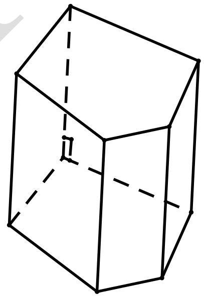
- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằn trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

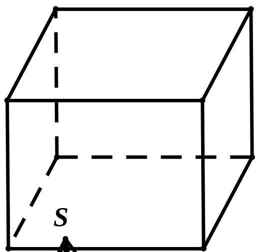
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R)$$

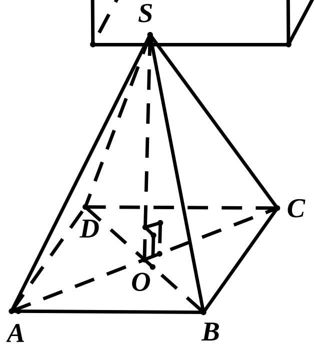
3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật.



- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều
- 2. Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật
- Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là ba kích thước.
- 3. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy và các mặt bên đều là hình vuông.

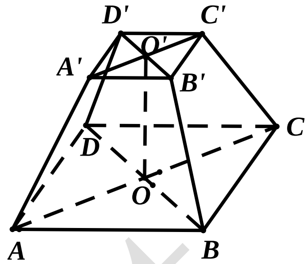


4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.



- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp được gọi là hình chóp cụt đều.
- Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đồng dạng.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1. Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta))=(a,b).$$

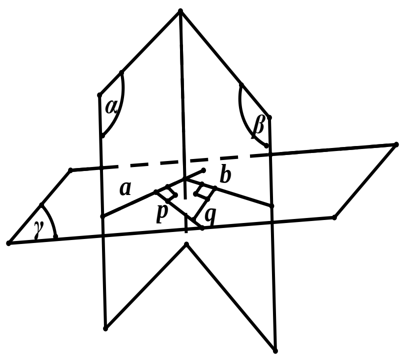
Cách 2. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và (β) khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu $S'=S\cos\varphi$, từ đó để tính $\cos\varphi$ thì ta cần tính S và S'.

Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

a)

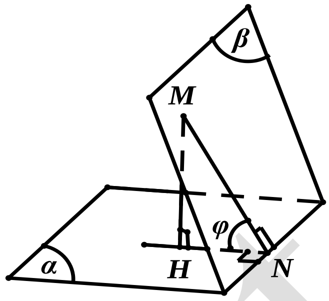
- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$
- Chọn mặt phẳng $(\gamma)\perp\Delta$
- Tìm các giao tuyến $a=(\gamma)\cap(\alpha), b=(\gamma)\cap(\beta)$
- $((\alpha),(\beta))=(a,b)$



b)

- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$
- Lấy $M \in (\beta)$. Dựng hình chiếu H của M trên (α)
- Dựng $HN \perp \Delta \Rightarrow MN \perp \Delta$.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Lời giải.

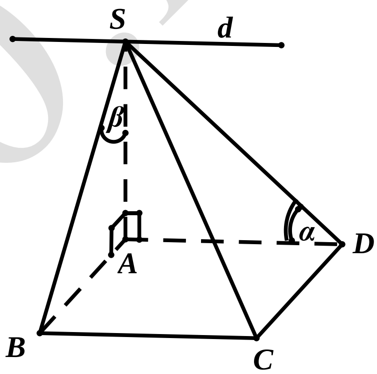
a) Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

$$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAD)$$

$(SAD) \cap (ABCD) = AD, (SAD) \cap (SCD) = SD$

$$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (DA, SD) = SDA = \varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^0$$



b) Ta có $\begin{cases} AD \cap (SAD) \\ BC \cap (SBC) \\ AD \, // \, BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d \, // \, AD \, // \, BC$.

Vì $\begin{cases} SA \perp d \\ d \, // \, AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp d$, $\begin{cases} d \, // \, AD \\ AD \perp AD \end{cases} \Rightarrow d \perp AB$ nên $(SAB) \perp d$

$(SAB) \cap (SBC) = SB, (SAB) \cap (SAD) = SA$ suy ra ASB chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

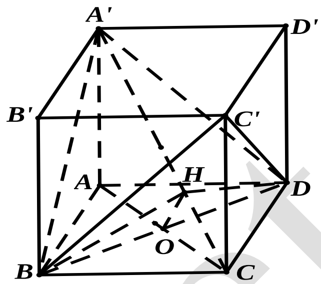
Tam giác ASB vuông cân tại A nên $ASB = 45^0$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $(A'BC)\cap(A'CD)=A'C$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và H là hình chiếu vuông góc của O trên $A'C$.



Do $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD\perp(ACA')\Rightarrow BD\perp A'C$

Vậy $\begin{cases} A'C\perp OH \\ A'C\perp BD \end{cases} \Rightarrow A'C\perp(BDH)$.

$(BDH)\cap(A'CD)=HD,(BDH)\cap(A'BC)=BH$

$\Rightarrow((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)$.

Tam giác BCA' vuông tại B có đường cao BH, do đó

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA'^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BH=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự $DH=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Áp dụng định lí côsin cho ΔHBD ta có

$$\cos BHD=\frac{HB^2+HD^2-BD^2}{2HB.HD}=\frac{\frac{2a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}-2a^2}{2.\frac{2a^2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow BHD=120^0$. Vậy $((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)=60^0$.

Cách 2. Gọi $H=A'C\cap(BDC')$, do mặt chéo (BDC') ứng với đường chéo $A'C$ nên $(BDC')\perp A'C$. Vậy góc giữa hai đường thẳng HB,HD chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Do $CB=CD=CC'\Rightarrow HB=HD=HC'$ và $BD=BC'=DC'=a\sqrt{2}$ suy ra H la tâm của tam giác đều $C'BD\Rightarrow BHD=120^0$.

Vậy $((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)=60^0$.

Cách 3: Do $\begin{cases} AB'\perp A'B \\ AB'\perp BC \end{cases} \Rightarrow AB'\perp(A'BC)$

Tương tự $AD'\perp(A'CD)$ nên $((A'BC),(A'BD))=(AB',AD')=60^0$ (vì $\Delta AB'D'$ đều).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=b,AC=c,AD=d$ đôi một vuông góc. Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ABC)$.

a)Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

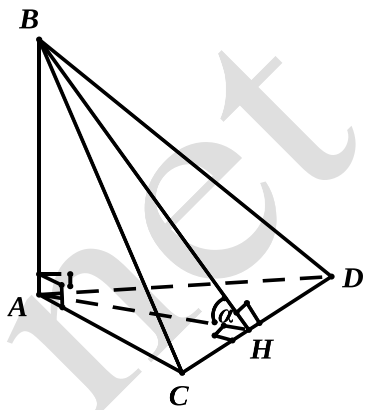
b) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^0, \beta = 45^0, \gamma = 60^0$

Lời giải.

a) ***Cách 1.***

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do

$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.



Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha = AHB$.

Ta có

$\tan\alpha = \frac{AB}{AH} = \frac{b}{AH}$, mà $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$

nên $\tan\alpha = \frac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}$.

Mặt khác

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$.

Tương tự ta có :

$\cos^2\beta = \frac{b^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$, $\cos^2\gamma = \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH.BI = BA^2 = b^2 \\ IH.IB = IA^2 = \frac{c^2d^2}{c^2+d^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{IH} = \frac{b^2(c^2+d^2)}{c^2d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$, mà

$\frac{IC}{ID} = \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{CD}$ nên

$$\overrightarrow{AH} = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\overrightarrow{AB} + \frac{b^2c^2+d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{b} + \frac{d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{c} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{d}$$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ACB)$. Từ đó ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{b}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{\dfrac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\dfrac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}}=\frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

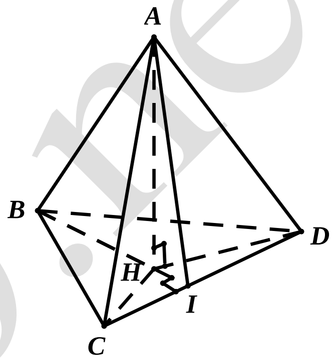
Tương tự :

$$\cos\beta=\frac{\left|\vec{c}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{bd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}},\cos\gamma=\frac{\left|\vec{d}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Suy ra $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

b) Sử dụng công thức hình chiếu

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).



Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn.

Không giảm tổng quát, giả sử B lớn nhất.

Ta có $CD^2=AC^2+AD^2=c^2+d^2$

Tương tự $CB^2=b^2+c^2, DB^2=b^2+d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có

$$\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC.BD}$$

$$=\frac{(b^2+c^2)+(b^2+d^2)-(c^2+d^2)}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}}$$

$$=\frac{2b^2}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}}>0$$ do đó B nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases}AH\perp CD\\AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow BH\perp CD$, tương tự ta có $CH\perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD .Do đó

$$S_{BCD}=S_{HBC}+S_{HBD}+S_{HCD}=S_{ABC}\cos\gamma+S_{ABD}\cos\beta+S_{ACD}\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{2}bc\cos 60^0+\frac{1}{2}bd\cos 45^0+\frac{1}{2}cd\cos 30^0=\frac{bc+\sqrt{2}bd+\sqrt{3}cd}{4}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB=2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải.

a) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$. $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$. Do đó BED là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $IAB = IBA = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

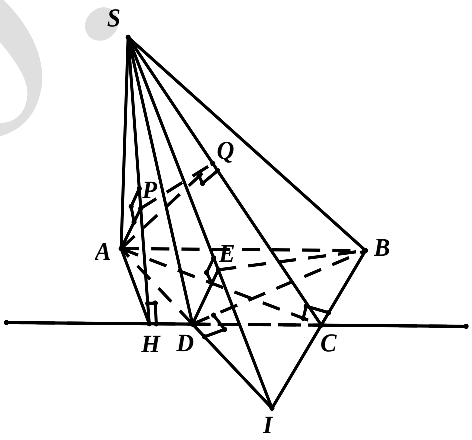
Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \dfrac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có

$$\tan BED = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{7} \Rightarrow BED = \arctan\sqrt{7}.$$

Vậy $\left((SAD),(SBC)\right) = \arctan\sqrt{7}$



b) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$

.

Do đó $PAQ = \left((SBC),(SCD)\right)$.

Trong tam giác SAH ta có :

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{SA\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos APQ = \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow APQ = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy $\left((SBC),(SCD)\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng , rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0 .

$\left((\alpha),(\beta)\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

Cách 3. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ rồi chứng minh $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$.

Các ví dụ

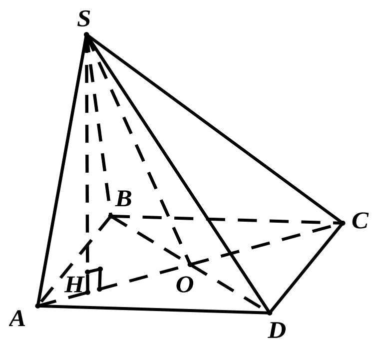
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b .

a) Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

b) Tính đường cao của hình chóp $S.ABCD$ theo a,b.

c) Tìm sự liên hệ giữa a và b để $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

Lời giải.



a) Gọi $O=AC\cap BD$, vì tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên nó là một hình thoi, vì thế $AC\perp BD$ và O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB=SD=b\Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S, do đó $SO\perp BD$.

Vậy $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$

$\Rightarrow (SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

b) Ta có $\begin{cases} (SAC)\perp(ABCD) \\ (SAC)\cap(ABCD)=AC \end{cases}$ nên trong (SAC) kẻ $SH\perp AC, H\in AC$ thì $SH\perp(ABCD)$, hay SH là đường cao của hình chóp.

Do hình chóp có các cạnh $SB=SD=b, CB=Cd=b, AB=AD=b$ nên các tam giác SBD, CBD, ABD là các tam giác cân bằng nhau suy ra $OS=OA=OC\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S. Từ đó ta có $SH.AC=SA.SC\Rightarrow SH=\dfrac{SA.SC}{AC}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Hình chóp $S.ABCD$ là một hình chóp đều. thì các cạnh bên bằng nhau nên $a=b$.

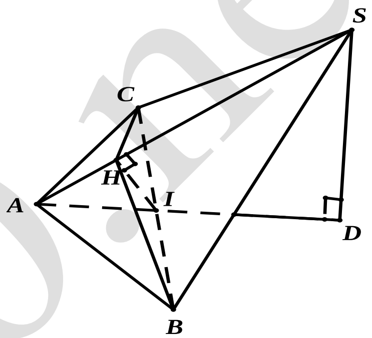
Và khi $a = b$ thì $AC = a\sqrt{2}$ mà $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên nó là hình vuông, tứ đó $S.ABCD$ là một hình chóp đều.
Vậy $S.ABCD$ là một hình chóp đều khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải.
Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $\widehat{BHC}$.



Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$,

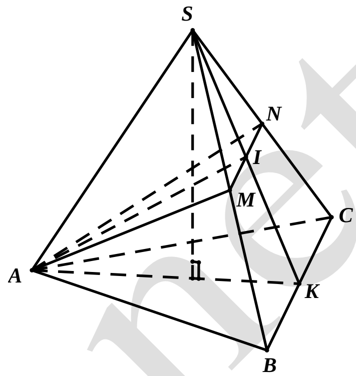
$$SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \text{ suy ra}$$

$$IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$. **(ĐH khối A-2002)**

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$. Từ giả thiết ta có $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN//BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN. Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.



Mặt khác $\begin{cases}(SBC)\perp(AMN)\\(SBC)\cap(AMN)=MN\\AI\subset(AMN)\\AI\perp MN\end{cases}$

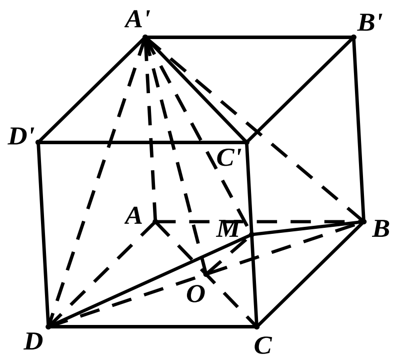
$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK \Rightarrow \Delta SAK$ cân tại $A \Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau. **(ĐH khối A-2003)**



Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$,

$\begin{cases}AC\perp BD\\AA'\perp BD\end{cases} \Rightarrow (ACC'A') \perp BD$

Vậy $\begin{cases}(ACC'A')\perp BD\\(ACC'A')\cap(A'BD)=OA'\\(ACC'A')\cap(MBD)=OM\end{cases}$ do đó góc giữa hai đường thẳng OM, OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

$OA'^2 = AO^2 + AA'^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = \dfrac{a^2}{2} + b^2$.

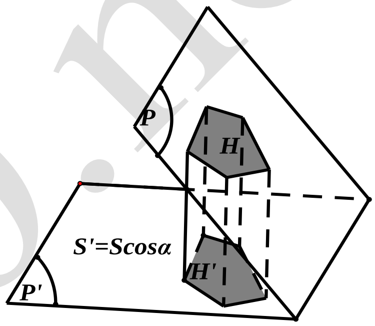
$MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = a^2 + b^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \dfrac{5b^2}{4}$.

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \Delta OMA'$ vuông tại $O \Leftrightarrow OM^2 + OA'^2 = MA'^2 \Leftrightarrow \dfrac{2a^2+b^2}{4} + \left(\dfrac{a^2}{2} + b^2\right) = \left(a^2 + \dfrac{5b^2}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 1$

$(A'BD) \perp (MBD)$ khi $\dfrac{a}{b} = 1$ (Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương)

Bài toán 03: ỨNG DỤNG CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU.

Giả sử S là diện tích đa giác (H) nằm trong (P) và S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (P') thì $S' = S\cos\varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 45^0 và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M,N,P,Q. Tính diện tích thiết diện, biết cạnh đyá của lăng trụ bằng a.

Lời giải.

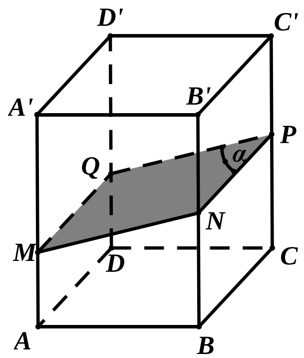
Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuông $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

$S' = S_{ABCD} = a^2$

Gọi $\varphi = ((\alpha),(ABCD))$ thì $\varphi = 45^0$

Do $S' = S\cos\varphi = S\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.

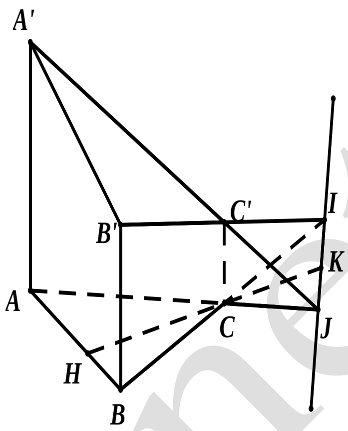


Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A,B,C lần lượt lấy các điểm A',B',C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{3a^2}{2}$.

Vì $CH\perp AB, CH=a, AH=a\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAC}=45^0$.



Gọi $I=B'C'\cap BC, J=A'C'\cap AC$.

Ta có $CC'=\dfrac{1}{2}BB'\Rightarrow BC=CI$

$CC'=\dfrac{1}{3}AA'\Rightarrow CJ=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔBCH ta có

$BC^2=BH^2+CH^2=5a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{5}$

Mặt khác $AB^2=CA^2+CB^2-2CA.AB\cos C$

$\Rightarrow \cos C=\dfrac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA.CB}=-\dfrac{1}{10}$.

Xét ΔICJ ta có $IJ^2=CI^2+CJ^2-2CI.CJ\cos\widehat{ICJ}=\dfrac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC'\perp(ICJ)$ nên $C'K\perp IJ$.

Vậy $\widehat{C'KC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

nên $S_{ABC}=S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}$.

Ta có $S_{ICJ}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}=\dfrac{3a^2}{4}$, mặt khác $S_{ICJ}=\dfrac{1}{2}IJ.CK$

$$\Rightarrow CK=\frac{2S_{ICJ}}{IJ}=\frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}}=\frac{3a}{\sqrt{26}}.$$

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan\widehat{C'KC}=\dfrac{CC'}{CK}=\dfrac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}}=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1+\tan^2\widehat{C'KC}=\dfrac{1}{\cos^2\widehat{C'KC}}\Rightarrow \cos\widehat{C'KC}=\dfrac{3}{\sqrt{35}}$.

Vậy $S_{ABC}=S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}\Rightarrow S_{A'B'C'}=\dfrac{S_{ABC}}{\cos\widehat{C'KC}}=\dfrac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của hình lập phương và vuông góc với đường chéo AC'. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cát bởi (α).

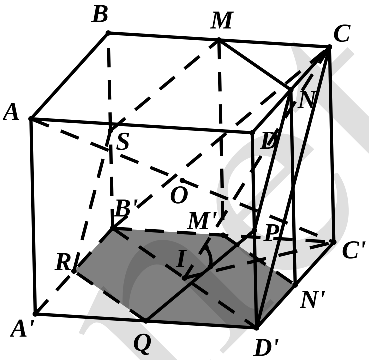
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, do $MA=MC'=a\sqrt{5}$ nên $\Delta MAC'$ cân tại

M, mà O là trung điểm của $AC' \Rightarrow MO \perp AC' \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Tương tự, (α) sẽ cắt các cạnh $DC, DD', A'D', A', B'BB'$ tại các điểm N, P, Q, N, S.

Thiết diện là lục giác $MNPQRS$. Xét phép chiếu vuông góc xuống mặt phẳng $(A'B'C'D')$, ta có hình chiếu của lục giác $MNPQRS$ là lục giác $M'N'D'QRB'$.



Gọi S, S' lần lượt là diện tích của các lực giác $MNPQRS$ và $M'N'D'QRB'$ thì $S' = S\cos\varphi$ (1) với φ là góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $S' = S_{A'B'C'D'} - \left(S_{A'QR} + S_{C'M'N'}\right)$

$= a^2 - \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8}\right) = \frac{3a^2}{4}$. (2)

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì $(ICC') \perp B'D'$ nên CIC' là góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

$$\text{Ta có } \cos CIC' = \frac{IC}{IC'} = \frac{IC}{\sqrt{CC'^2 + IC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

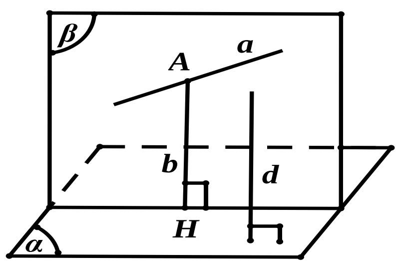
Lại có $(\alpha)//(CB'D')$ nên $\varphi = CIC' \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có $S = \frac{S'}{\cos\varphi} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

Phương pháp:



Bài Toán: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α). Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α).

Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A \in a$
- Dựng đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α). Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Goi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định và tính thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

Lời giải.

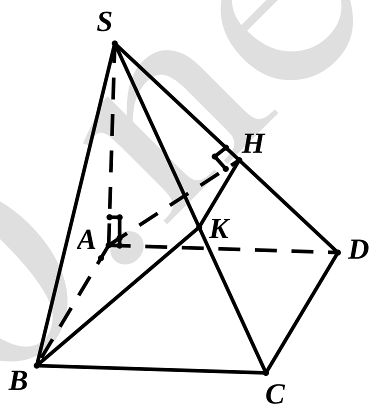
Kẻ $AH \perp SD$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, lại có $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$.

Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α).



Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ H \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HK \,//\, AB \,//\, CD$. Thết diện là tứ giác $AHKB$.

Dễ thấy $AHKB$ là hình thang vuông tại A và H, nên $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSCD có $HK \,//\, CD$ nên $\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SH.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2}$

$= \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow HE = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a$.

Vậy $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{4}\right)\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 2.

a) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

b) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Lời giải.

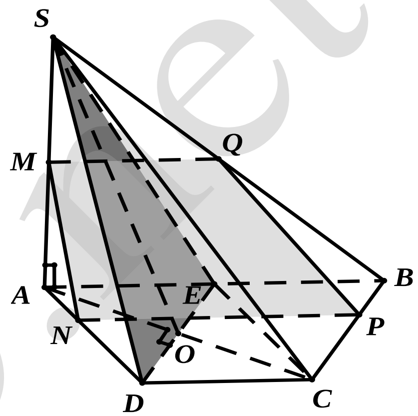
a) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì $ADCE$ là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.

Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.



Ta có $SO = \sqrt{OA^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$BC = DE = a\sqrt{2}$, do

$DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp AO \Rightarrow S_{SDE} = \frac{1}{2}SO.DE$

$= \frac{1}{2}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} AB \perp (SAD) \\ (\beta) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \,//\, (\beta)$.

Vậy $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MQ \,//\, AB, Q \in SB$.

Tương tự, $\begin{cases} N \in (\beta) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (ABCD) = NP \,//\, AB, P \in BC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases} NP \,//\, AB \\ MQ \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, MQ \quad (1)$

Lại có $\begin{cases} MN \subset (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(NP + MQ)MN$.

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$, $MQ = \frac{1}{2}AB = a$

$\frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} \Rightarrow NP = \frac{AB.DN}{DA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(2(a-x)+a\right)\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2} = \frac{(3a-x)\sqrt{a^2+4x^2}}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

64. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC

b) AI và OC

65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2002)

67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Xác định điểm O cách đều các điểm A, B, C, D và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = b, AD = c$ và $BAC = CAD = DAB = 60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

69. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc $ABC = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2008)

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2007)

72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC = a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD).

b) Từ A đến (SBC).

74. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$, $AC = 4, BD = 2, SO = \sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

76. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c$.
Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN \perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi ĐH Khối B Năm 2007)

78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh $SA \perp (ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

80. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB \perp MA'$ và tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.