HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:

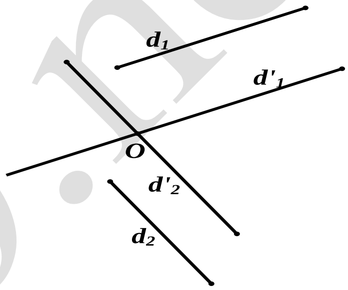
B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ O dựng các đường thẳng $d_1^{'}, d_2^{'}$ lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng $d_1^{'}, d_2^{'}$ chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

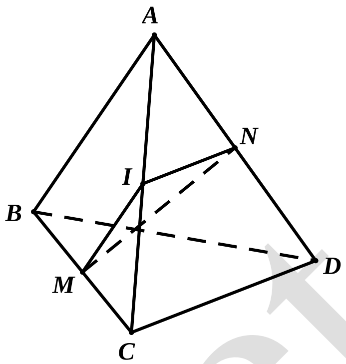
Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = CD = a, MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.



Cách 1.

Gọi I là trung điểm của AC. Ta có

$$\begin{cases} IM \,//\, AB \\ IN \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (AB,CD)=(IM,IN)$$

Đặt $MIN=\alpha$

Xét tam giác IMN có

$IM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}, IN=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2}, MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ Theo định lí côsin, ta có

$$\cos\alpha=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM.IN}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}=-\frac{1}{2}<0$$

$\Rightarrow MIN=120^0$ suy ra $(AB,CD)=06^0$.

Cách 2. $\cos(AB,CD)=\cos(IM,IN)=\dfrac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IM^2+IN^2-2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2}=-\frac{a^2}{8}$$

$$\cos(AB,CD)=\left|\cos(IM,IN)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}=\frac{1}{2}$$

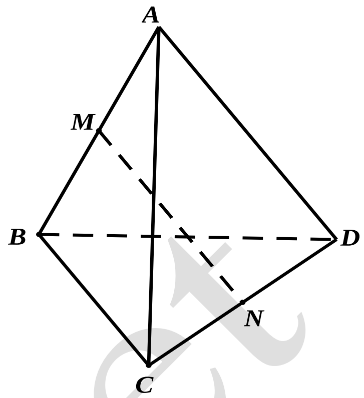
Vậy $(AB,CD)=60^0$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc gữa đường thẳng MN với các đường thẳng AB,BC và CD.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

Khi đó, ta có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=m$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\right)=60^0$.



Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=\frac{m}{2}$.

Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$MN^2=\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{c}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}.\vec{c}\right)=\frac{m^2}{2}$$

$$\Rightarrow MN=\frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}-\vec{b}^2\right)=0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90^0.
- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}^2+\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}-\vec{c}^2+\vec{b}\vec{c}\right)=0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90^0.
- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(-\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{m^2}{2}\Rightarrow \cos\left(MN,BC\right)=\frac{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\frac{m^2}{2}}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45^0.

Bài toán 02: DÙNG TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

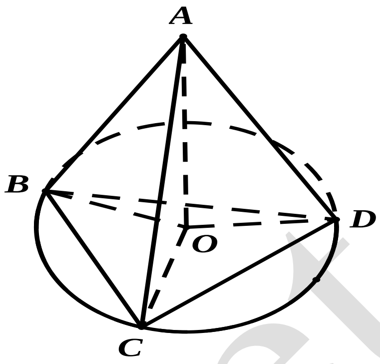
Để chứng minh $d_1\perp d_2$ ta có trong phần này ta có thể thực hiện theo các cách sau:

- Chứng minh $d_1\perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}=0$ trong đó $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của d_1 và d_2.
- Sử dụng tính chất $\begin{cases} b\,//\,c \\ a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp b$.
- Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1,d_2 và tính trực tiếp góc đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn noại tiếp tam giác BCD. Chứng minh $AO\perp CD$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$, ta lưu ý trong tam giác ABC thì $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

suy ra

$\overrightarrow{AO}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AO}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)=-\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}$

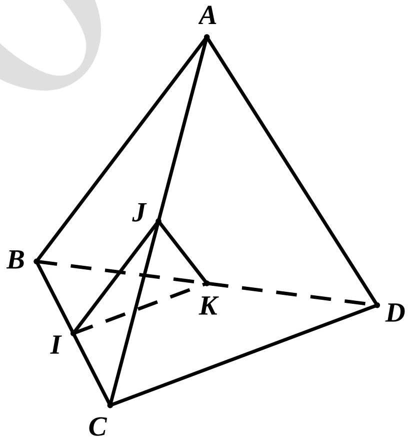
$=-\dfrac{OA^2+OD^2-CD^2}{2}+\dfrac{OA^2+OC^2-AC^2}{2}=0$

(Vì $AC=AD=a, OD=OC=R$)

Vậy $AO\perp CD$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD=\dfrac{4}{3}AB$. Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của BC,AC,BD. Cho biết $JK=\dfrac{5}{6}AB$. Tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

Lời giải.



Ta có $IJ=\dfrac{1}{2}AB$, $IK=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{2}{3}AB$

$IJ^2+IK^2=\dfrac{1}{4}AB^2+\dfrac{4}{9}AB^2=\dfrac{25}{36}AB^2\ \ (1)$

Mà $JK=\dfrac{5}{6}AB\Rightarrow JK^2=\dfrac{25}{36}AB^2\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IJ^2+IK^2=JK^2\Rightarrow JI\perp IK$

.

Mặt khác ta có $IJ /\!/ AB, IK /\!/ CD\Rightarrow AB\perp CD$.

Tương tự $\begin{cases} IJ /\!/ AB \\ AB\perp CD \end{cases}\Rightarrow IJ\perp CD$.

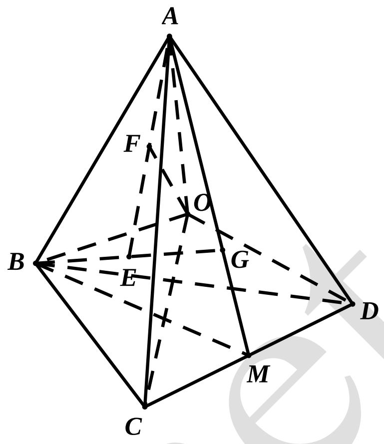
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$. Gọi O là điểm thỏa mãn $OA=OB=OC=OD$ và G là trọng tâm của tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE. Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.

Lời giải.

Đặt $OA = OB = OC = OD = R\left(1\right)$ và $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Ta có $AB = AC = AD$ nên $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta AOD\left(c - c - c\right)$ suy ra

$AOB = AOC = AOD$ $\left(2\right)$, từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{d}$ $\left(3\right)$.



Gọi M là trung điểm của CD và do $AG = 2GM$ nên

$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b}\left(4\right)$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AE, BG ta có

$12\overrightarrow{OF} = 6\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG}$

$= 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 7\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ $\left(5\right)$ Từ $\left(4\right)$ và $\left(5\right)$ ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = \left(7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)\left(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 18\vec{a}\vec{b} + 8\vec{a}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{d} + 2\vec{c}\vec{d}$.

Theo (3) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 2\vec{d}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}$ suy ra $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$ hay $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

16. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Chứng minh $AB \perp CD$.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA.
Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x\left(0 \le x \le a\right)$. Chứng minh

a) $AC' \perp B'D'$

b) $AC' \perp MN$.

18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ // BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

20. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh $AD \perp BC$.

b) Gọi M,N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

21. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $ABC = B'BA = B'BC = 60^0$. Chứng minh $AC \perp B'D'$.

22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm của AB,CD,AD,BC và AC.

a) Chứng minh $MN \perp RP, MN \perp RQ$.

b) Chứng minh $AB \perp CD$.

24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

a) Chứng minh các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC,SC,SD lần lượt tại N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Đặt $AM = x$. Tính diện tích của $MNPQ$ theo a và