# GIỚI HẠN HÀM SỐ

**1. Định nghĩa:**

**1.1. Giới hạn hàm số:** Cho khoảng $K$ chứa điểm $x_0$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên $K$ (có thể trừ điểm $x_0$) có giới hạn là $L$ khi x dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n) \to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

**1.2.Giới hạn một bên:**

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số $L$ gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với mọi dãy $(x_n): x_0 < x_n < b$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số $L$ gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với mọi dãy $(x_n): a < x_n < x_0$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

**Chú ý:** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

**1.3. Giới hạn tại vô cực**

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là $L$ khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là $L$ khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

**1.4.Giới hạn vô cực**

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to +\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

* Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực

* Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay $x_0$ bởi $-\infty$ hoặc $+\infty$.

**2. Các định lí về giới hạn**

***Định lí 1:*** Gới hạn của tổng, hiệu, tích, thương (mẫu số dẫn về $L \neq 0$) khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$) bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn đó khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$).

***Chú ý:*** Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực

***Định lí 2: (Nguyên lí kẹp)***

Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên $K$ chứa điểm $x_0$ (có thể các hàm đó không xác định tại $x_0$). Nếu $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in K$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

**3. Một số gới hạn đặc biệt**

* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k} = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k+1} = +\infty\ (-\infty)$

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{k}{f(x)} = 0 \quad (k \neq 0)$.

## Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

**Phương pháp:**

Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

**1.** $A = \lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + x + 1)$

**2.** $B = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

**3.** $C = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

**4.** $D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{x-1}$

**Lời giải.**

**1**. Với mọi dãy $(x_n)$ mà $\lim x_n = 1$ ta có:

$$A = \lim\left(3x_n^2 + x_n + 1\right) = 3 + 1 + 1 = 5$$

**2**. Với mọi dãy $(x_n)$ mà $\lim x_n = 1$ và $x_n \neq 1 \quad \forall n$ ta có:

$$B = \lim \frac{(x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1)}{x_n - 1} = \lim\left(x_n^2 + x_n + 1\right) = 3.$$

**3**. Với mọi dãy $(x_n)$ mà $\lim x_n = 2$ và $x_n \neq 2 \quad \forall n$ ta có:

$$B = \lim \frac{\sqrt{x_n + 2} - 2}{x_n - 2} = \lim \frac{(x_n - 2)}{(x_n - 2)\left(\sqrt{x_n + 2} + 2\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{x_n + 2} + 2} = \frac{1}{4}$$

**4**. Với mọi dãy $(x_n)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta có:

$$D = \lim\frac{3x_n + 2}{x_n - 1} = \lim\frac{3 + \frac{2}{x_n}}{1 - \frac{1}{x_n}} = 3.$$

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

**1.** $f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to 0$ **2.** $f(x) = \cos^5 2x$ khi $x \to -\infty$.

**Lời giải.**

**1.** Xét hai dãy $(x_n): x_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)^2}, (y_n): y_n = \frac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$ và $\lim f(x_n) = 1;\ \lim f(y_n) = 0$.

Nên hàm số không có giới hạn khi $x \to 0$.

**2.** Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n = n\pi;\ y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**Lời giải.**

Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = x_0$ ta có: $\lim|f(x_n)| = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa

**1.** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x+1}{x-2}$ **2.** $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^3 + 1\right)$ **3.** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

**4.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{x+3}{x-2}$ **5.** $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{2x^2 - x + 1}{x+2}$. **6.** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{3x+2}{2x-1}$

**7.** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$ **8.** $\lim\limits_{x \to 1^+}\frac{4x-3}{x-1}$ **9.** $\lim\limits_{x \to 2^-}\frac{3x-1}{x-2}$

**Bài 2** Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn :

**1.** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ khi $x \to 0$ **2.** $f(x) = \cos x$ khi $x \to +\infty$

**Bài 3** Bằng định nghĩa hãy tìm các giới hạn sau

**1.** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ **2.** $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x+1}{(2-x)^4}$ **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{3x^2}{2x^2 + 1}$

**4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{\left(x^4+1\right)\left(2-x\right)}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$.

**Bài 4** Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn

**1.** $f(x)=\cos\dfrac{1}{x^2}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x)=\sin 2x$ khi $x\to+\infty$

## Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

**Bài toán 01: Tìm** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **biết** $f(x)$ **xác định tại** $x_0$ **.**

**Phương pháp**:

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn ( Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}=\dfrac{\sin 0+3\cos 0+0}{2.0+\cos^2 0}=3$

**2.** Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}=\dfrac{\sqrt{2^2+3}-2.2}{\sqrt[3]{2+6}+2.2-1}=\dfrac{\sqrt{7}-4}{5}$.

**Ví dụ 2.** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hay tìm giới hạn đó?

**1.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x<1\\ \dfrac{3x+2}{3} & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ khi $x\to 1$;

**2.** $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2+3x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ khi $x\to 0$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{3}=\dfrac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{5}{3}$.

**2**. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x^2+3x+1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x^2+3x+2) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

**Ví dụ 3.** Tìm $m$ để các hàm số:

**1.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1} & \text{khi } x \ge 0 \\ \dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 0$.

**2.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3mx+2m-1 & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 1$.

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1} = 2m+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} = \dfrac{3m-1}{3}$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 2m+1 = \dfrac{3m-1}{3} \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.

**2.** Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3mx+2m-1) = 5m-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-(x+2)\sqrt{1-x} + mx + 1\right) = m+1$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 5m-1 = m+1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tìm giới hạn các hàm số sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$

**4.** $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$.

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$

**4.** $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$

**Bài 3** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

**1.** $f(x)=\begin{cases}3x^3-5x^2+4 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

**2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x\to 2$.

**Bài 4** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

**1.** $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ -3x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x=1$.

**2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x=2$.

**Bài 5**

**1.** Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x\to 2$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}.$$

**2.** Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

**Bài 6** Tìm $a$ để hàm số

**1.** $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn tại $x\to 0$

**2.** $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>1\\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

**Bài toán 02.** Tìm $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bơzu cho đa thức:

**Định lí:** Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta có :

$$f(x)=(x-x_0)f_1(x).$$

*Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\dfrac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

<u>**Chú ý :**</u>Nếu tam thức bậc hai $ax^2+bx+c$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$
3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau: $\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$

Suy ra: $\frac{x^n - 1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$

Do đó: $A = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1\right) = n$.

**2.** Ta có: $x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x+2)(x^2-2)$

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1} = -\frac{3}{2}$.

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $C = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ **2.** $D = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^2(1+3x)^3 - 1}{x}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $(1+mx)^n = 1 + mnx + \frac{m^2n(n-1)x^2}{2} + m^3x^3.A$

Với $A = C_n^3 + mxC_n^4 + ... + (mx)^{n-3}C_n^n$

$(1+nx)^m = 1 + mnx + \frac{n^2m(m-1)x^2}{2} + n^3x^3B$

Với $B = C_m^3 + nxC_m^4 + ... + (nx)^{m-3}C_m^m$

Do đó: $C = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} + x\left(m^3A - n^3B\right)\right]$

$$= \frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}.$$

**2.** Ta có: $\dfrac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}=\dfrac{(1+2x^2)\left[(1+3x)^3-1\right]}{x}+$

$$+\frac{(1+2x)^2-1}{x}=(1+2x)^2\left(9+27x+27x^2\right)-(4+4x)$$

Suy ra: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^2\left(9+27x+27x^2\right)-(4+4x)\right]=5$

**Ví dụ 3.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt{3x-2}-2}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1-x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)}=0$

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x+2-x^3)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2+2x+1)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}=-1.$$

**Ví dụ 4.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$ **2.** $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$

**Lời giải.**

**1.** Đặt $t=x-1$ ta có: $B=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2t+1}-1}{t}=\dfrac{2}{3}$

**2.** Ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1=\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}\left(\sqrt[4]{4x-3}-1\right)+$

$$+\sqrt{2x-1}\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)+\sqrt{2x-1}-1$$

Mà: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}=1$

Nên ta có: $C=1+1+1=3$.

**Ví dụ 5.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2-(\sqrt{5x-1}-2)}{x-1}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=I-J$$

$$I=\lim\limits_{x\to 1}\frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4}=\frac{7}{12}.$$

$$J=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{\sqrt{5x-1}+1}=\frac{5}{3}$$

Vậy $A=-\dfrac{2}{3}$.

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\dfrac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{1}{6}$

$$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+20})^2+3\sqrt[3]{x+20}+9}=\frac{1}{27}$$

$$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+9})^3+2(\sqrt[4]{x+9})^2+4\sqrt[4]{x+9}+8}=\frac{1}{32}.$$

Vậy $B=\dfrac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{32}}=\dfrac{112}{27}$.

## CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm các giới hạn sau :

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

**4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau :

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}\quad (m,n\in \mathbb{N}^*)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}\quad (n\in \mathbb{N}^*, a\neq 0)$

**3.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$ **4.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$

với $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

**Bài 3** Tìm các gới hạn sau :

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$

**5.** $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

**7.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ **8.** $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

**9.** $G=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$ **10.** $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

**11.** $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$

**12.** $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

**Bài 4** Tìm các gới hạn sau :

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$

**5.** $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

**7.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}$ **8.** $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$

**9.** $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$ **10.** $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x^2\right)^{n-1}}$.

**Bài 5** Tìm các giới hạn sau

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$.

**Bài 6** Tìm các giới hạn sau

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$

**Bài toán 03: Tìm** $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$**, trong đó** $f(x),g(x)\to\infty$**, dạng này ta còn gọi là dạng vô định** $\dfrac{\infty}{\infty}$**.**

**Phương pháp**: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=8$

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{1}{2}$

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x(2+\dfrac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

.

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\sqrt{3}$

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$ **2.** $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$

**3.** $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ **4.** $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

**5.** $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$ **6.** $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

**7.** $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

**7.** $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$.

**Bài 3** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$.

**Bài 4** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$.

**Bài 5** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$ **4.**

$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

**Bài 6** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

**Bài 7** Tìm các giới hạn sau

**1.** $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$, $(a_0b_0\neq0)$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$.

**Bài toán 04: Dạng vô định:** $\infty-\infty$ **và** $0.\infty$

**Phương pháp**:

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x})$

**Lời giải.**

Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x}=(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)+(\sqrt{x^2-2x}+x)$

$$=\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}+\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1}=0.$$

**Ví dụ 2.** Tìm giới hạn sau: $B=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

**Lời giải.**

Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

$$\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}=-\frac{1}{4}.$$

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$ **2.** $B=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$

**3.** $C=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x]$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ **2.** $B=\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

**3.** $C=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$ **4.** $D=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x)$

**5.** $E=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2})$ **6.** $F=\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{1-x^3})$.

## Bài toán 05: Dạng vô định các hàm lượng giác

**Phương pháp**:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}.\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\frac{1}{6}$

Do đó: $A=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$.

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}}{\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}=1$

Vậy $B=\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sin x+\cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $0\le\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|\le x^3$

Mà $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x^2}=0$

Vậy $A=0$.

**2.** Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sin x+\cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà: $0\le\left|\frac{2\sin x+\cos^2 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|\le\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$.

Do đó: $B=0$.

## CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

**Bài 3** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$

**Bài 4** Tìm các giới hạn sau:

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 1}.\frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha\sin\frac{1}{x}\quad(\alpha>0)$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

**Bài 5.** Tìm các giới hạn sau

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$

**4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

**5.** $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$

**6.** $F=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

**7.** $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$

**8.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$.

**Bài 6.** Tìm các giới hạn sau

**1.** $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$

**2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$

**3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$

**4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

**5.** $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$

**6.** $F=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

**7.** $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$

**8.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}$.