# §4. ĐƯỜNG TRÒN

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

### 1. Phương trình đường tròn.

- Phương trình đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R là :

  $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Dạng khai triển của (C) là : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $c=a^2+b^2-R^2$

- Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với điều kiện $a^2+b^2-c>0$, là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

### 2. Phương trình tiếp tuyến :

Cho đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

- Tiếp tuyến $\Delta$ của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM

nên phương trình : $\Delta:(x_0-a)(x-a)+(y_0-a)(y-a)=R^2$

- $\Delta: ax+by+c=0$ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$
- Đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có hai tiếp tuyến cùng phương với Oy là

$x=a\pm R$. Ngoài hai tiếp tuyến này các tiếp tuyến còn lại đều có dạng : $y=kx+m$

## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

### DẠNG 1: Nhận dạng phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

### 1. Phương pháp giải.

*Cách 1:* + Đưa phương trình về dạng:

$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn $(C)$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

*Cách 2:* Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).

Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

$a)\ x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1)

$b)\ x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2)

$c)\ 2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3)

$d)\ 2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4)

***Lời giải:***

a) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với

$a=-1;\ b=2;\ c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có:

$$\left(3\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{5}{2}$$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$ bán kính

$R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của $x^2$ và $y^2$ khác nhau.

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4\left(m-2\right)y+6-m=0$ (1)

a) Tìm điều kiện của $m$ để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

***Lời giải:***

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$a^2 + b^2 - c > 0$

Với $a = m; b = 2(m-2); c = 6 - m$

Hay

$m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m; 2(m-2))$ và bán kính:

$R = \sqrt{5m^2 - 15m + 10}$

***Ví dụ 3:*** Cho phương trình đường cong $(C_m)$:

$x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn $(C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

***Lời giải:***

a) Ta có

$$a^2 + b^2 - c = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{m+4}{2}\right)^2 - m - 1 = \frac{(m+2)^2 + 4}{2} > 0$$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I : $\begin{cases} x_I = -\dfrac{m+2}{2} \\ y_I = \dfrac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I + y_I - 1 = 0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$

c) Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2 + y_0^2 + (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m + x_o^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 3.71:** Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của nó.

a) $x^2+y^2-4x+2y+6=0$. b) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$.

c) $x^2-y^2+4x-5y+1=0$. d) $2x^2+2y^2-3x-2=0$

**Bài 3.72:** Cho phương trình :

$x^2+y^2+6mx-2(m-1)y+11m^2+2m-4=0$.

a) Tìm điều kiện của $m$ để pt trên là pt đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn.

**Bài 3.73:** Cho phương trình $(C_m)$:

$x^2+y^2+2(m-1)x-2(m-3)y+2=0$.

a) Tìm $m$ để $(C_m)$ là phương trình của một đường tròn.

b) Tìm $m$ để $(C_m)$ là đường tròn tâm $I(1;-3)$. Viết phương trình đường tròn này.

c) Tìm $m$ để $(C_m)$ làđường tròn có bán kính $R=5\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn đó

**Bài 3.74:** Cho $A\ -1;0$ , $B\ 2;4$ và $C\ 4;1$ . Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C).

### DẠNG 2: Viết phương trình đường tròn

**1. Phương pháp giải.**

*Cách 1*: + Tìm toạ độ tâm $I\ a;b$ của đường tròn (C)

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C)

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

*Cách 2:* Giả sử phương trình đường tròn (C) là:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ ).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

+ Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

*Chú ý:*

* $A\in\ C\ \Leftrightarrow IA=R$

* $C$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta$ tại $A\Leftrightarrow IA=d\ I;\Delta\ =R$

* $(C)$ tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I;\Delta_1) = d(I;\Delta_2) = R$

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1 :*** Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận $AB$ làm đường kính với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

***Lời giải:***

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn $AB$ suy ra $I(4;3)$

$$AI = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

Đường tròn cần tìm có đường kính là $AB$ suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R = AI = \sqrt{13}$ nên có phương trình là

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$

c) Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm $M, N, P$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

**Nhận xét:** Đối với ý c) ta có thể làm theo cách sau

Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

***Ví dụ 2:*** Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I\left(-1;2\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A\left(2;-1\right)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ $Ox$ và $Oy$

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1 : 3x+4y+5=0$ và $d_2 : 4x-3y-5=0$

***Lời giải:***

a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng $\Delta$ nên $R=d\left(I;\Delta\right)=\dfrac{\left|-1-4-7\right|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy phương trình đường tròn (C) là : $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=\dfrac{4}{5}$

b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I\left(R;-R\right)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có:

$$R^2=IA^2 \Leftrightarrow R^2=\left(2-R\right)^2+\left(-1+R\right)^2 \Leftrightarrow R^2-6R+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R=1 \\ R=5 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$ và $\left(x-5\right)^2+\left(y+5\right)^2=25$

c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K\left(6a+10;a\right)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với $d_1, d_2$ nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{\left|3(6a+10)+4a+5\right|}{5}=\frac{\left|4(6a+10)-3a-5\right|}{5} \Leftrightarrow$$

$$\left|22a+35\right|=\left|21a+35\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{-70}{43} \end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K\left(10;0\right)$ và $R=7$ suy ra $\left(C\right): \left(x-10\right)^2+y^2=49$

- Với $a = \dfrac{-70}{43}$ thì $K\left(\dfrac{10}{43};\dfrac{-70}{43}\right)$ và $R = \dfrac{7}{43}$ suy ra

$$(C): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C): (x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (C): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

***Ví dụ 3:*** Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$

***Lời giải:***

a) Ta có tam giác $OAB$ vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và Bán kính

$$R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

b) Ta có $OA = 8;\ OB = 6;\ AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Mặt khác $\dfrac{1}{2}OA.OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác $ABC$)

Suy ra $r = \dfrac{OA.OB}{OA + OB + AB} = 2$

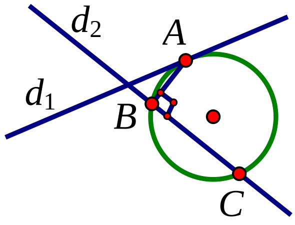
Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên

tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ là:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

***Ví dụ 4:*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$. và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với $d_1$ tại A, cắt $d_2$ tại hai điểm B, C sao cho tam giác $ABC$ vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác $ABC$ có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.



Hình 3.1

***Lời giải*** (hình 3.1)

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right),\ a > 0;\ B, C \in d_2 \Rightarrow B\left(b;\sqrt{3}b\right), C\left(c;\sqrt{3}c\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\sqrt{3}\left(a+b\right)\right), \overrightarrow{AC}\left(c-a;\sqrt{3}\left(c+a\right)\right)$

Tam giác $ABC$ vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn C.

Do đó $AC \perp d_1 \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow -1.\left(c-a\right) + \sqrt{3}.\sqrt{3}\left(a+c\right) = 0 \Leftrightarrow 2a + c = 0$ (1)

$AB \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow 1.\left(b-a\right) + 3\left(a+b\right) = 0 \Leftrightarrow 2b + a = 0$ (2)

Mặt khác

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}d\left(A;d_2\right).BC \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{\left(c-b\right)^2 + 3\left(c-b\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow 2a\left|c-b\right| = 1$ (3)

Từ (1), (2) suy ra $2\left(c-b\right) = -3a$ thế vào (3) ta được

$$a\left|-3a\right| = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Do đó $b = -\frac{\sqrt{3}}{6}, c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là

$$R = \frac{AC}{2} = 1$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$C\ :\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1$$

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 3.75**.Viết phương trình đường tròn (C) biết

a) (C) có đường kính $AB$ với $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

b) (C) ngoại tiếp $\Delta ABC$ với $A(4;4), B(1;-5)$ và $C(-3;3)$.

c) (C) có tâm $I(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y+7=0$.

**Bài 3.76:** (ĐH 2007A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A\ \ 0;2$ ,

$B\ \ -2;-2$ và $C\ \ 4;-2$ . Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

**Bài 3.77:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho tam giác $ABC$, hai cạnh $AB$, $AC$ theo thứ tự có phương trình $x+y-2=0$ và $2x+6y-3=0$. Cạnh $BC$ có trung điểm $M\ \ -1;1$ .

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**Bài 3.78:** Viết phương trình đường tròn (C) trong trường hợp sau:

a) Đi qua $A(-4;2)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ.

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng: $d_1: 3x-y+3=0$, $d_2: x-3y+9=0$.

**Bài 3.79**: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn (C): $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng

$\Delta_1: x-y=0$, $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn ($C_1$); biết đường tròn ($C_1$) tiếp xúc với các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$ và tâm K thuộc (C).

**Bài 3.80:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm

$A\ \ 2;0$ , $B\ \ 6;4$

. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

**Bài 3.81:** Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ tạo bởi ba đường thẳng $4x-3y-65=0$, $7x-24y+55=0$ $3x+4y-5=0$.

**Bài 3.82.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho 2 điểm $A(0;5)$, $B(2;3)$.

Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.

**Bài 3.83:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(-1;1)$ và đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A, gốc toạ độ O và tiếp xúc với đường thẳng $d$.

**Bài 3.84:** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho ba điểm $A(-1;7)$, $B(4;-3)$ và $C(-4;1)$. Hãy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$

**Bài 3.85:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(2;1)$ và đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua M cắt $\Delta$ ở 2 điểm A, B phân biệt sao cho $\Delta MAB$ vuông tại M và có diện tích bằng 2.

$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

## DẠNG 3: Vị trí tương đối của điểm; đường thẳng; đường tròn với đường tròn

**1. Phương pháp giải.**

- *Vị trí tương đối của điểm $M$ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $IM$

+ Nếu $IM<R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM=R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM>R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

- *Vị trí tương đối giữa đường thẳng $\Delta$ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

+ Nếu $d(I;\Delta)<R$ suy ra $\Delta$ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d(I;\Delta)=R$ suy ra $\Delta$ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d(I;\Delta)>R$ suy ra $\Delta$ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng $\Delta$ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- *Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')*

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính $II'$, $R+R'$, $\left|R-R'\right|$

+ Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
+ Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
+ Nếu $II' < \left|R-R'\right|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
+ Nếu $II' = \left|R-R'\right|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau
+ Nếu $\left|R-R'\right| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

*Chú ý:* Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho đường thẳng $\Delta : x-y+1=0$ và đường tròn

$C\ : x^2+y^2-4x+2y-4=0$

a) Chứng minh điểm $M\ \ 2;1$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa $\Delta$ và $\ C$

c) Viết phương trình đường thẳng $\Delta'$ vuông góc với $\Delta$ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

***Lời giải:***

a) Đường tròn (C) có tâm $I\ \ 2;-1$ và bán kính $R=3$.

Ta có $IM = \sqrt{\ 2-2\ ^2 + \ 1+1\ ^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

b) Vì $d\ \ I;\Delta\ = \dfrac{\left|2+1+1\right|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên $\Delta$ cắt $\ C\ $ tại hai điểm phân biệt.

c) Vì $\Delta'$ vuông góc với $\Delta$ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên $\Delta'$ vuông góc với $\Delta$ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó $\Delta'$ nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta} = \ 1;1\ $ làm vectơ pháp tuyến suy ra

$\Delta' : 1\ \ x-2\ \ +1\ \ y+1\ \ =0$ hay $x+y-1=0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta' : x+y-1=0$

***Ví dụ 2:*** Trong mặt phẳng $Oxy$ , cho hai đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và

$(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B
b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B
c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

***Lời giải***

a) Cách 1: $(C)$ có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R = 5$, $(C')$ có tâm $I'(3;1)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$

$II' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$

Ta thấy $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < |R_1 + R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 + y^2 - 2(y+3) - 6y - 15 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 3 \end{array}\right. \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B(6;3)$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A, B nhận $\overrightarrow{AB}(5;5)$ làm vectơ chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

c) Cách 1: Đường tròn cần tìm (C") có dạng

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

(C") đi qua ba điểm A, B và O nên ta có hệ

$$\begin{cases} 1 + 4 - 2a + 4b + c = 0 \\ 36 + 9 - 12a - 6b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy (C") : $x^2+y^2-7x-y=0$

Cách 2: Vì A, B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình

$$x^2+y^2-2x-6y-15+m\left(x^2+y^2-6x-2y-3\right)=0 \text{ (*)}$$

Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình (*) khi và chỉ khi

$$-15+m.\left(-3\right)=0 \Leftrightarrow m=-5$$

Khi đó phương trình (*) trở thành $x^2+y^2-7x-y=0$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-7x-y=0$

***Ví dụ 3:*** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$

a) Tìm $m$ để đường thẳng $\Delta$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác $IAB$ là lớn nhất

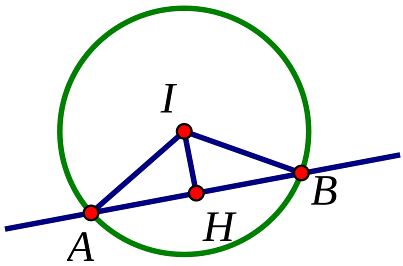
***Lời giải*** (hình 3.2)

a) Đường tròn (C) có tâm $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R=3$

$\Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d\left(I;\Delta\right)<R \Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3$$

$\Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m)



Hình 3.2

b) Ta có

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB=\frac{9}{2}\sin AIB\le\frac{9}{2}$$

Suy $\max S_{IAB}=\frac{9}{2}$ khi và chỉ khi

$\sin AIB=1 \Leftrightarrow AIB=90^0$

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta$ khi đó

$$AIH=45^0 \Rightarrow IH=IA.\cos 45^0=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ta có

$$d\left(I;\Delta\right)=IH \Leftrightarrow \frac{\left|1-2m\right|}{\sqrt{2+m^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2+8m+16=0 \Leftrightarrow m=-4$$

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 3.86:** Cho $d: x-5y-2=0$ và (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{13}$

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Tìm toạ độ giao điểm của (C) và d

**Bài 3.87:** Biện luận số giao điểm của (C) và d trong đó:

$$d: mx-y-3m-2=0,\quad (C): x^2+y^2-4x-2y=0$$

**Bài 3.88:** Trong mặt phẳng toạ độ cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d. Tìm toạ độ các giao điểm của (C) và (C').

**Bài 3.89:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-12x-4y+36=0$. Viết phương trình đường tròn ($C_1$) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

**Bài 3.90:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* lần lượt có phương trình: (C): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $d: x-y+3=0$. Tìm toạ độ điểm M nằm trên *d* sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

**Bài 3.91:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=1$. Đường tròn (C′) tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

**Bài 3.92:** Cho hai đường tròn: $(C): x^2+y^2=1$ và $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$

Xác định m để $(C_m)$ tiếp xúc với (C).

**Bài 3.93.** Trong mặt phẳng $Oxy$, Viết phương trình đường thẳng qua điểm O và cắt đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y-15=0$. tại hai điểm A, B sao cho O là trung điểm của AB.

**Bài 3.94.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua A và cắt đường tròn (C) theo một dây cung MN sao cho

a) MN có độ dài lớn nhất b) MN có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 3.95.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ có tâm I và điểm $M(-1;-3)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác $IAB$ có diện tích lớn nhất.

**Bài 3.96.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 4x = 0$. Một đường thẳng $\Delta$ đi qua giao điểm của (C) và (C') lần lượt cắt lại (C) và (C') tại M và N. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ khi MN đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 3.97:** Cho $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ và $M(7;3)$. Viếp phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại $A, B$ sao cho $MA = 3MB$.

**Bài 3.98:** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và điểm $M(2;2)$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (C) tai hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$.

**Bài 3.99:** Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và hai điểm $A(7;9)$, $B(0;8)$. Tìm M trên đường tròn để $MA + 2MB$ đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 3.100:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. Gọi *I* là tâm đường tròn $(C)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(1;-3)$ cắt $(C)$ tại hai điểm *A* và *B*. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ biết tam giác $IAB$ có diện tích bằng 8 và cạnh *AB* là cạnh lớn nhất.

**Bài 3.101:** Cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$ là $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$, H thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y - 4 = 0$, trung điểm AB là $M(2;3)$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác.

**Bài 3.102:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho điểm $A(1;0)$ và các đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$ và $(C'): x^2 + y^2 = 5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C) và (C') để tam giác $ABC$ có diện tích lớn nhất.

**Bài 3.103:** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$ cho đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ và đường tròn $C\ : x^2+y^2-2x+2y-7=0$. Chứng minh rằng $\Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B và tìm toạ độ điểm C trên (C) sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng $3+\sqrt{2}\ \sqrt{7}$.

**Bài 3.104:** Trong mặt phẳng $Oxy$, gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ với $A\ 2;1$, $B\ 4;0$, $C\ 3;\sqrt{2}-1$ và đường thẳng $d: 4x+y-4=0$. Tìm trên d điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N sao cho diện tích tam giác $NAB$ lớn nhất.

**Bài 3.105:** Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $C\ : x^2+y^2-2x-3=0$. Gọi B,C là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x+y-3=0$ với đường tròn (C). Hãy tìm điểm A trên đường tròn (C) sao cho tam giác $ABC$ có chu vi lớn nhất.

## ✍ DẠNG 4: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

**1. Phương pháp giải.**

Cho đường tròn (C) tâm $I\ a;b$, bán kính R

- Nếu biết tiếp điểm là $M\ x_0;y_0$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}\ x_0-a;y_0-b$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $x_0-a\ \ x-x_0\ +\ y_0-b\ \ y-y_0\ =0$
- Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng $\Delta$ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d\ I;\Delta\ =R$ để xác định tiếp tuyến.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A\ 1;-1$; $B\ 1;3$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

***Lời giải:***

Đường tròn (C) có tâm $I\left(3;-1\right)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R; IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=\left(2;0\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2\left(x-1\right)+0\left(y+1\right)=0$ hay $x=1$

b) Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua B có dạng:
$a\left(x-1\right)+b\left(y-3\right)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d\left(I;\Delta\right)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|3a-b-a-3b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow \left(a-2b\right)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.
+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3$, $b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là
$3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và
$3x+4y-15=0$

***Ví dụ 2:*** Viết phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của đường tròn
$\left(C\right): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$

b) Đường thẳng $\Delta$ hợp với trục hoành một góc $45^0$

***Lời giải:***

a) Đường tròn (C) có tâm $I\left(2;-2\right)$, bán kính $R=3$

Vì $\Delta\perp\Delta'$ nên $\Delta$ nhận $\vec{u}\left(-3;2\right)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng
$-3x+2y+c=0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d\left(I;\Delta\right)=3 \Leftrightarrow \frac{\left|-10+c\right|}{\sqrt{13}}=3 \Leftrightarrow c=10\pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x+2y+10\pm 3\sqrt{13}=0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d\left(I;\Delta\right)=3\Leftrightarrow\frac{\left|2a-2b+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow\left(2a-2b+c\right)^2=9\left(a^2+b^2\right)\ (*)$$

Đường thẳng $\Delta$ hợp với trục hoành một góc $45^0$ suy ra

$\cos\left(\Delta;Ox\right)=\frac{\left|b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\cos 45^0=\frac{\left|b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=-b$

TH1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2\Leftrightarrow\pm c=3\sqrt{2}a$, chọn $a=b=1\Rightarrow c=\pm3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x+y\pm3\sqrt{2}=0$

TH2: Nếu $a=-b$ thay vào (*) ta có

$$18a^2=\left(4a+c\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a\\c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a\end{array}\right.$$

Với $c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a$, chọn

$a=1, b=-1, c=\left(3\sqrt{2}-4\right)\Rightarrow\Delta: x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a$, chọn

$a=1, b=-1, c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\Rightarrow\Delta: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là

$\Delta_{1,2}: x+y\pm3\sqrt{2}=0$, $\Delta_3: x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và

$\Delta_4: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

***Ví dụ 3:*** Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$\left(C_1\right): x^2+y^2-4y-5=0$ và

$\left(C_2\right): x^2+y^2-6x+8y+16=0$

***Lời giải:***

Đường tròn $\left(C_1\right)$ có tâm $I_1\left(0;2\right)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $I_2\left(3;-4\right)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình

$\Delta : ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

$\Delta$ là tiếp tuyến chung của $(C_1)$ và $(C_2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = 3 \\ d(I_2, \Delta) = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} & (*) \\ |3a - 4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

Suy ra $|2b + c| = |3a - 4b + c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ c = \dfrac{-3a + 2b}{2} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $a = 2b$ chọn $a = 2, b = 1$ thay vào (*) ta được

$c = -2 \pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

TH2: Nếu $c = \dfrac{-3a + 2b}{2}$ thay vào (*) ta được $|2b - a| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$

$a = 0$ hoặc $3a + 4b = 0$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = b$, chọn $b = c = 1$ ta được $\Delta : y + 1 = 0$

+ Với $3a + 4b = 0 \Rightarrow c = 3b$, chọn $a = 4, b = -3, c = -9$ ta được

$\Delta : 4x - 3y - 9 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là :

$2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0, y + 1 = 0, 4x - 3y - 9 = 0$

**3. Bài tập luyện tập**

**Bài 3.106:** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến $d$ của đường tròn trong các trường hợp sau:

a) Điểm tiếp xúc là $M(2;1)$

b) $d$ đi qua A(3;6)

c) $d$ song song với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 2008 = 0$

d) $d$ vuông góc với đường thẳng $\Delta' : 2x - 3y - 4 = 0$

**Bài 3.107:** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(2;5)$. Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ A tới đường tròn. Giả sử tiếp tuyến này tiếp xúc với đường tròn tại hai điểm M, N. Hãy tính độ dài MN.

**Bài 3.108:** Cho $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*) biết tiếp tuyến cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $\Delta ABC$ có diện tích bằng 4.

**Bài 3.109:** Tìm toạ độ giao điểm của hai đường tròn:
$(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$
và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn ấy.

**Bài 3.110**Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng *d* mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $AMB = 60^0$.

**Bài 3.111**Cho $(C_m): x^2 + y^2 + 2mx - 2(m-1)y + 1 = 0$

a) Tìm m để $(C_m)$ là đường tròn

b) Tìm m để $(C_m)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x + y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$

c) Tìm m để từ điểm $A(7;0)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với $(C_m)$ vuông góc với nhau.

d) Tìm m để từ điểm $A(7;0)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với $(C_m)$ và tạo với nhau góc $60^0$.

**Bài 3.112**Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn:
$(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(C_1)$, $(C_2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d: x + 6y - 6 = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn $(C_1)$, $(C_2)$.

**Bài 3.113**Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* lần lượt có phương trình: (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$, $d: x + y - 1 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C), biết A nằm trên $d$.

**Bài 3.114**Trong mặt phẳng toạ độ cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi $T_1, T_2$ là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng $T_1\ T_2$.

**Bài 3.115** Cho đường tròn (C) có phương trình: $x-3\ ^2+y^2=4$
Tìm trên $Oy$ điểm M mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) và 2 tiếp tuyến đó tạo thành góc $60^0$