ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

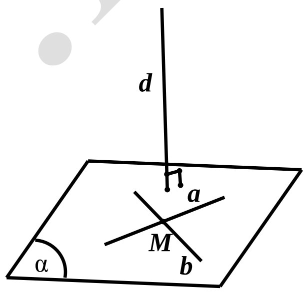
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Vậy $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp a, \forall a\subset(\alpha)$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Định lí: Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α)

$$\begin{cases} d\perp a \\ d\perp b \\ a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b=M \end{cases} \Rightarrow a\perp(\alpha).$$



3. Tính chất.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Sự liên quan giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.

1. $\begin{cases} a // b \\ (\alpha)\perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp b \ \ (h1)$

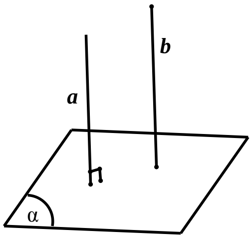
2. $\begin{cases} a\neq b \\ a\perp(\alpha) \\ b\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // b \ \ (h2)$

3. $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a\perp(\beta) \ \ (h3)$

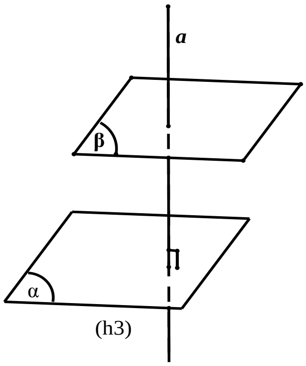
4. $\begin{cases} (\alpha)\neq(\beta) \\ (\alpha)\perp a \\ (\beta)\perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta) \ \ (h4)$

5. $\begin{cases} a//(\alpha) \\ b\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow b\perp a \ \ (h5)$

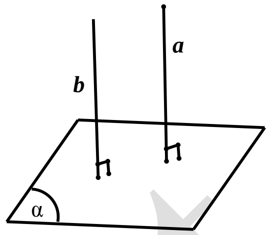
6. $\begin{cases} a\not\subset(\alpha) \\ a\perp b \\ (\alpha)\perp b \end{cases} \Rightarrow a//(\alpha) \ \ (h6)$



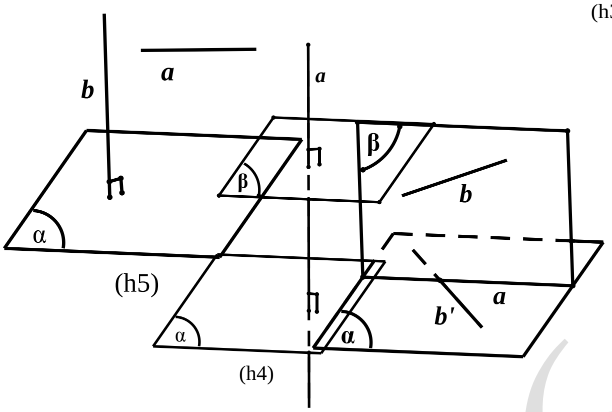
(h1)



(h3)



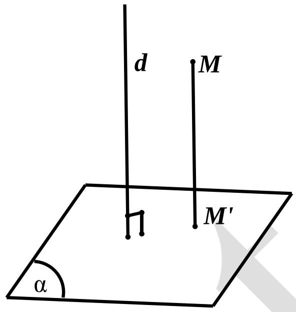
(h2)



(h5)

(h4)

5. Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc.



5.1. Định nghĩa : Cho đường thẳng $d \perp (\alpha)$.

Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).

5.2. Định lí ba đường vuông góc.

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu của b trên (α). Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.

5.3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

- Nếu d vuông góc với và mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90^0.
- Nếu d không vuông góc với và mặt phẳng (α) thì góc giữa d với hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Muốn chứng minh đương thẳng $d \perp (\alpha)$ ta có thể dùng môt trong hai cách sau.

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$

Cách 2. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d \,//\, a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. ***Ví dụ 1.*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB,SC và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.

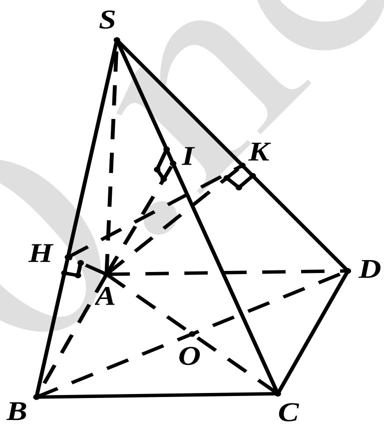
b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải.

a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$,

lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.



Vậy $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông nên

$BD \perp AC$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Vậy $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

$\begin{cases} A \in (AHK) \\ AI \perp SC \\ SC \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \subset (AHK)$.

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau (do có SA chung và $AB = AD$)

suy ra $SB = SD, SH = SK \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD$

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow HK \perp AC$.

Vậy $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

$\begin{cases} AI \subset (SAC) \\ HK \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

a) $BC \perp (OAH)$

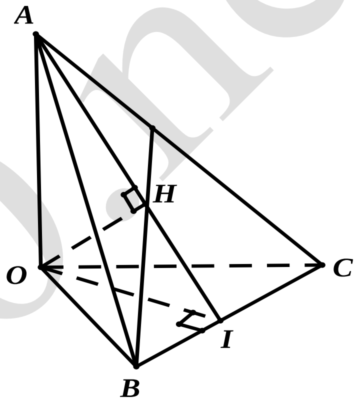
b) H là trực tâm của ΔABC

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Lời giải.

a) Ta có

$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$



Lại có $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \quad (3)$

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC \quad (4)$ Từ (3) và (4) suy ra $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \quad (5)$

Lại có $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC \quad (6)$. Từ $(5),(6)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi $I = AH \cap BC$, do $\begin{cases} OI \subset (OAH) \\ BC \perp (OAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp OI$

Ta giác OAI vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \quad (*)$.

Tương tự cho tam giác OBC ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ thay vào (*) thu được $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S \neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A,B).

a) Chứng minh $MB \perp (SAM)$.

b) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK \perp (SBM), SB \perp (AHM)$

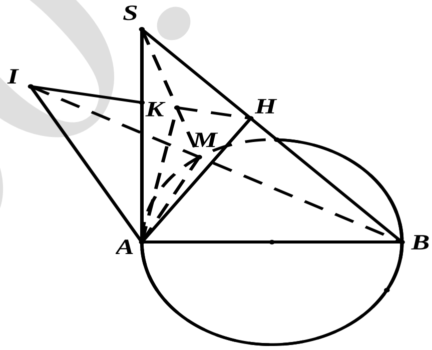
c) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp (\alpha) \\ MB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SA \perp MB \quad (1)$

Lại có $MB \perp MA \quad (2)$ (t/c góc chắn nửa đường tròn)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MB \perp (SAM)$.



b) Ta có $AK \perp SM$,

$MB \perp (SAM), AK \subset (SAM) \Rightarrow MB \perp AK$.

Suy ra $AK \perp (SBM)$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp (SBM) \\ SB \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow AK \perp SB$,

lại có $AH \perp SB$ suy ra $SB \perp (AHK)$.

c) Ta có $\begin{cases} AI \subset (AHK) \\ SB \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SB \quad (3)$

$\begin{cases} AI \subset (\alpha) \\ SA \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SA \quad (4)$. Từ $(3),(4)$ suy ra $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có góc $A = 120^0$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm $S \notin (ABC)$ sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Chứng minh $AO \perp (SBC)$.

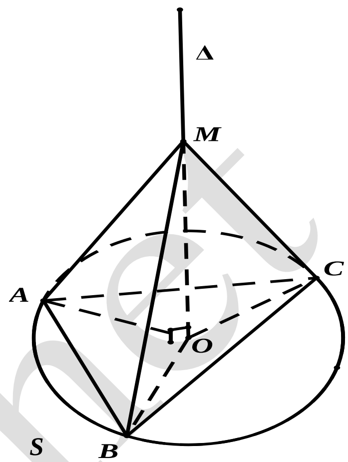
Lời giải.

Để giải bài toán này, trước tiên chúng ta chứng minh một kết quả sau:

Trong không gian tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó. (đường thẳng này được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó).

Chứng minh: Gọi M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và O là hình chiếu của trên của M trên (ABC).

Các tam giác vuông MOA, MOB, MOC có MO chung.
Vậy $MA = MB = MC \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Vậy tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

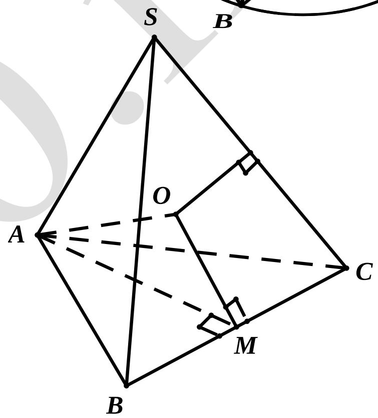


Quay lại bài toán

Gọi M là trung điểm của BC, ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$.

$AB = \dfrac{BM}{\sin 60^0} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$. Mặt khác $AC = a$

suy ra $AS = AB = AC = a$, điểm A cách đều ba đỉnh S, B, C của ΔSBC, do đó gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC thì AO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC suy ra $AO \perp (SBC)$.



Bài toán 02: THIẾT DIỆN ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

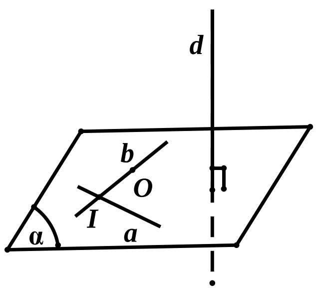
Phương pháp:

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song như đã biết ở (dạng 2, §2 chương II).

Cách 2. Ta dựng mặt phẳng (α) như sau:

Dựng hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.



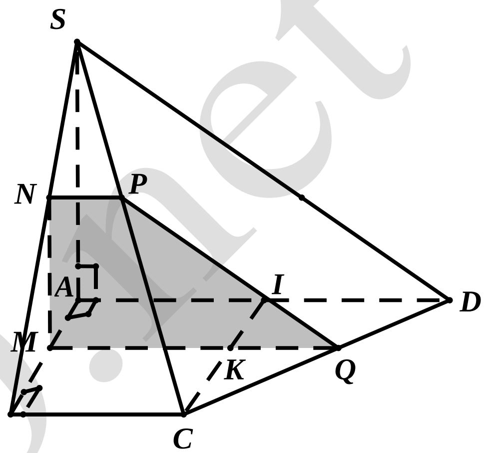
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B với $AB=BC=a, AD=2a$; $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Đặt $AM=x(0<x<a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} B\notin(\alpha) \\ BC\perp AB \Rightarrow BC//(\alpha) \\ (\alpha)\perp AB \end{cases}$.

Tương tự $\begin{cases} A\notin(\alpha) \\ SA\perp AB \Rightarrow SA//(\alpha) \\ (\alpha)\perp AB \end{cases}$.

Do

$$\begin{cases} M\in(ABCD) \\ BC\subset(ABCD)\Rightarrow(\alpha)\cap(ABCD)=MQ//BC, Q\in CD \\ BC//(\alpha) \end{cases}.$$

Tương tự $\begin{cases} M\in(SAB)\cap(\alpha) \\ SA\subset(SAB) \qquad \Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MN//SA, N\in SB \\ SA//(\alpha) \end{cases}$.

$$\begin{cases} N\in(SBC)\cap(\alpha) \\ BC\subset(SBC) \qquad \Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=NP//BC, P\in SC \\ BC//(\alpha) \end{cases}.$$

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $\begin{cases} MQ//BC \\ NP//BC \end{cases}\Rightarrow MQ//NP$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} MQ//AB \\ MN//SA\Rightarrow MQ\perp MN \\ SA\perp AB \end{cases}$ suy ra thiết diện là một hình thang vuông tại M và N.

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MQ+NP)MN$$

Gọi I là trung điểm của AD và $K = CI \cap MQ$.

Do $MN // SA$ nên $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{BM.SA}{BA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$.

Xét trong hình thang $ABCD$ ta có :

$\frac{KQ}{ID} = \frac{CK}{CI} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow KC = \frac{ID.BM}{BA} = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$

$MQ = MK + KQ = a + (a-x) = 2a - x$.

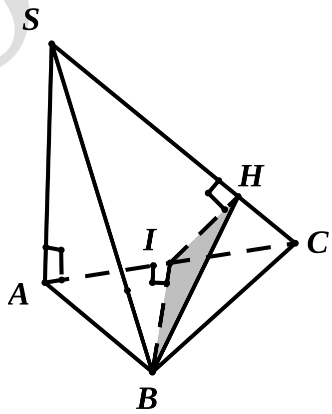
$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a - x + x)2(a-x) = 2a(a-x)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích của thiết diện này.

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm của AC, dựng $IH \perp SC, H \in SC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$. Mặt khác $IH \perp SC$ nên $(BIH) \perp SC$. Vậy (BIH) chính là mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với SC.

Thiết diện là tam giác IBH.

b) Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow IB \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

$BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh a).

Hai tam giác CHI và CAS có góc C chung nên chúng đồng dạng. Từ đó suy ra

$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$.

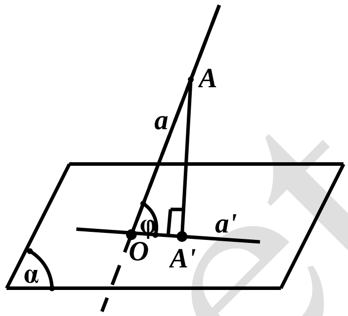
Vậy $S_{BIH} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Bài toán 03: TÍNH GÓC GỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $\widehat{AOA'} = \varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).



Lưu ý:

- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' // b$.
- Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

Các ví dụ

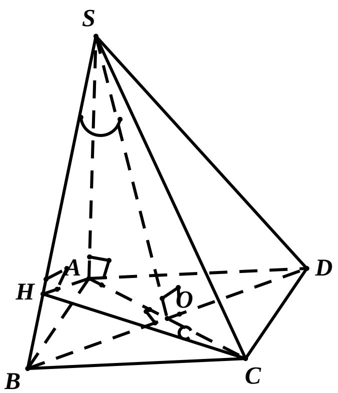
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính

a) Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC).

b) Góc giữa AC với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$ suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).



Vậy $(SB,(SAC)) = \widehat{BSO} = \varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

b) Trong (SAB) gọi H là hình chiếu của A trên SB

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$, hay CH là hình chiếu của CA trên (SBC). Vậy $(AC,(SBC)) = ACH = \alpha$.

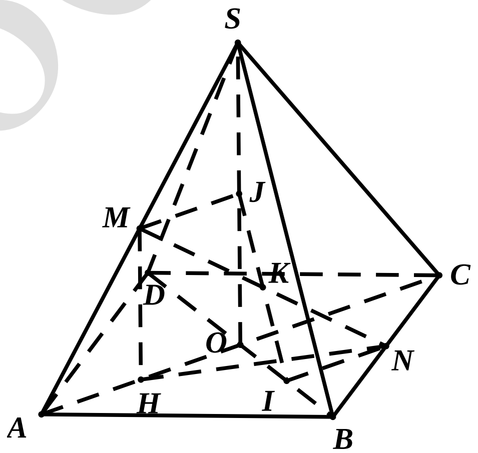
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{a\sqrt{\frac{6}{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$; M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Biết góc giữa MN với $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải.

Cách 1. Kẻ $MH // SO, H \in OA$.



Do $\begin{cases} MH // SO \\ SO \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

suy ra NH là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$ $\Rightarrow MNH$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.

$$HB^2 = OH^2 + OB^2$$

Ta có $= \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2}$.

$$= \frac{5a^2}{8}$$

$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Xet ΔMHN có

$$MN = \frac{HN}{\cos 60^0} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ MH = NH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}.$$

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì $MJ // IN$ và $MJ = IN$.

Gọi $K = IJ \cap MN \Rightarrow JK = \frac{1}{2}IJ$ và $MJ \perp (SBD) \Rightarrow MKJ$ là góc giữa MN và (SBD).

Ta có $IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \frac{15a^2}{8} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 2a^2$.

$\Rightarrow IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $MKJ = \varphi \Rightarrow \tan\varphi = \frac{MJ}{JK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi = \arctan\frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2 = \frac{1}{4}\left(SO^2 + AC^2 + OB^2\right) = \frac{1}{4}\left(SO^2 + \frac{5a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}$.

Ta có φ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ nên chọn $\vec{n} = \overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\varphi = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}} \ (*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 nên

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8SO^2 = 3\left(2SO^2 + 5a^2\right)$$

$\Leftrightarrow 2SO^2 = 15a^2$. Thay vào $(*)$ suy ra $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO \perp (ABCD)$.Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td}=\frac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

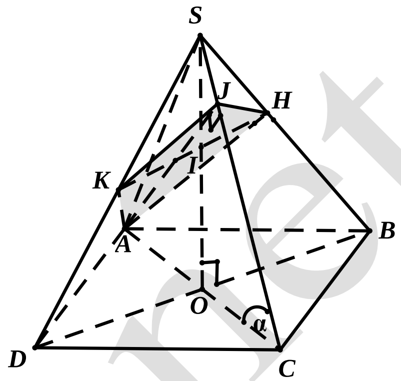
Lời giải.

Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K. Do

$\begin{cases} BD\perp SO \\ BD\perp AC \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAC) \Rightarrow BD\perp SC$ mà

$(\alpha)\perp SC \Rightarrow (\alpha) // BD$.

Vậy



$$\begin{cases} BD\subset (SBD) \\ BD // (\alpha) \\ (SBD)\cap(\alpha)=HK \end{cases} \Rightarrow KH // BD \Rightarrow HK\perp (SAC) \Rightarrow HK\perp AJ$$

do đó $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI$.

Do $SO\perp (ABCD) \Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $(SC,(ABCD))=SCO=\varphi$.

Ta có $AJ=AC\sin\varphi=a\sqrt{2}\sin\varphi$; $SO=OC\tan\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

$\Delta SOC\sim\Delta SJI \Rightarrow SIJ=SCO=\varphi \Rightarrow AIO=SIJ=\varphi$.

Từ đó ta có $OI=OA\cot\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi$.

$$\frac{HK}{BC}=\frac{SI}{SO}=1-\frac{OI}{SO}=1-\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}=1-\cot^2\varphi$$

$\Rightarrow KH=BD(1-\cot^2\varphi)=a\sqrt{2}(1-\cot^2\varphi)$.

Vậy $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI=a\sqrt{2}\sin\varphi.a\sqrt{2}(1-\cot^2\varphi)=2a^2\sin\varphi(1-\cot^2\varphi)$

Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\varphi(1-\cot^2\varphi)=\frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow 4\sin^2\varphi-\sin\varphi-2=0$

$\sin\varphi=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ (do $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\varphi>0$)

$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

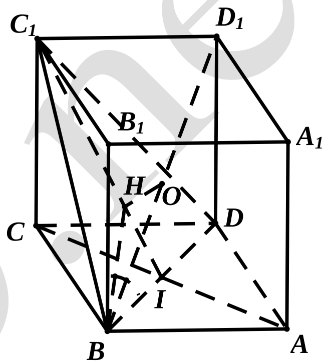
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải.

Cách 1.

Gọi $I = AC \cap BD, O$ là trung điểm của BD_1 thì $O \in (CAA_1C_1)$.



Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CAA_1C_1)$, hạ $OH \perp IC_1, H \in IC_1$ thì $OH \perp (BDC_1)$, vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là góc $OBH = \alpha$. Đặt $AB = AD = a, AA_1 = b$ thì

$BD_1 = \sqrt{AB^2 + AB^2 + DD_1^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$

$\Rightarrow OB = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

Dễ thấy $HO = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 5}}$

Do $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2 \Rightarrow \sin\alpha \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \leq \arcsin\frac{1}{3}$ (Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

Vậy $\max\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ khi $a = b$.

Cách 2. $\overrightarrow{CB} = \vec{x}, \overrightarrow{CD} = \vec{y}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = a, |\vec{z}| = b$

$\overrightarrow{BD_1} = -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH \perp C_1I$ và $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (BDC_1)$.

Ta có $\frac{C_1H}{IH} = \frac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1} = \frac{CC_1^2}{CI^2} = \frac{b^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2b^2}{a^2}$ nên

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1} + \frac{\frac{2b^2}{a^2}}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI} = \frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}.2\overrightarrow{CI}$$

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CI}=\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right|=\sqrt{\frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2+\frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{y}^2+\frac{a^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

Vậy $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CH}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{\left|\left(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)\left(\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}\,\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

$=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}$.

Theo BĐT AGM ta có $\frac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}\le\frac{ab}{\sqrt{3\sqrt[4]{a^2b^4}\,3\sqrt[4]{b^2a^4}}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha\le\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha\le\arcsin\frac{1}{3}\Rightarrow\max\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ khi $a=b$.

Bài toán 04: TÌM TẬP HỢP HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG HAY MỘT MẶT PHẲNG DI ĐỘNG.

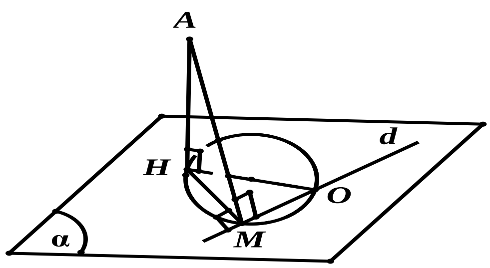
Phương pháp:

Để giải các bài toán dạng này trước tiên ta cần nắm chắc lời giải của hai bài toán gốc sau:

Bài Toán 1: Trong không gian cho (α) và hai điểm cố định A và O với $A\notin(\alpha)$, $O\in(\alpha)$, d là một đường thẳng di động trong (α) và luôn đi qua O. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d. Tìm tập hợp điểm H khi d di động.

Lời giải.

Dựng $AH\perp(\alpha)$ suy ra H cố định.



Ta có $\begin{cases} d\perp AH \\ d\perp AM\end{cases}\Rightarrow d\perp(AMH)$

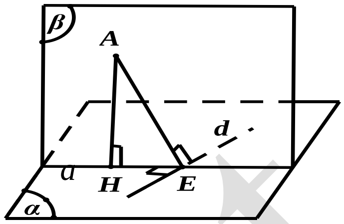
$\Rightarrow d\perp HM$.

Trong mặt phẳng (α) điểm M nhìn đoạn OH cố định dưới một góc vuông suy ra M thuộc đường tròn đường kính OH trong (α).

Bài Toán 2: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A cố định (α) là mặt phẳng di động nhưng luôn chứa d. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên (α) khi (α) di động.

Lời giải.

Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d và $a=(\alpha)\cap(\beta)$. Trong (β) gọi H là hình chiếu của A trên a và $E=d\cap(\beta)$. Ta có A,E cố định và trong mặt phẳng (β) điểm H nhì đoạn AE dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính AE.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các mặt đều là hình vuông với O là tâm của hình hộp và M là một điểm chuyển động trên đoạn AB. Gọi H là hình chiếu của C xuống đường thẳng OM. Tìm quỹ tích điểm H

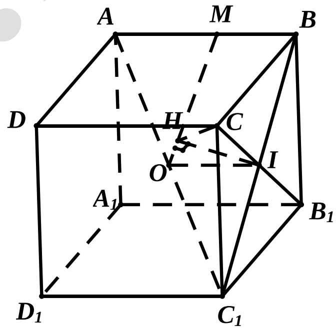
Lời giải.

Phần thuận.

Gọi $I=C_1B\cap BC_1$, do

$$\begin{cases} AB\perp BC \\ AB\perp BB_1 \end{cases}\Rightarrow AB\perp(BCC_1B_1)\Rightarrow AB\perp CI$$

mà $CI\perp BC_1\Rightarrow CI\perp(ABC_1D_1)\Rightarrow CI\perp OH$, mặt khác $OH\perp CH$ nên $OH\perp(CHI)\Rightarrow OH\perp IH$. Điểm H nhì đoạn thẳng OI cố định dưới một góc vuông đồng thời $H\in OM\subset(ABC_1D_1)$ cố định nên H thuộc đường tròn đường kính OI trong (ABC_1D_1).



Giới hạn.

Khi $M\equiv A$ thì $H\equiv H_1$ trong đó H_1 là hình chiếu của C trên AC_1.

Khi $M\equiv B$ thì $H\equiv H_2$ trong đó H_2 là hình chiếu của C trên D_1B.

Vậy H chạy trên cung H_1H_2

Phần đảo.

Giả sử H' là một điểm bất kì trên cung H_1H_2, ta chứng minh tồn tại điểm M' trên đoạn AB sao cho H' là hình chiếu của C trên OM'.

Gọi $M'=OH'\cap AB$. Dễ thấy $IC\perp(ABC_1)\Rightarrow IC\perp OM'$

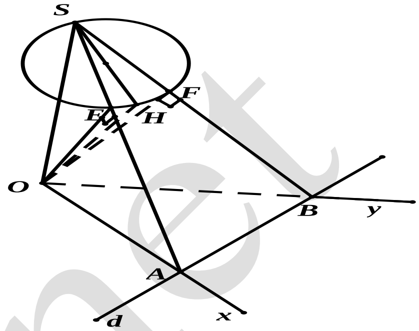
Vậy $\begin{cases} OM'\perp IC \\ OM'\perp IH' \end{cases}\Rightarrow OM'\perp(ICH')\Rightarrow CH'\perp OM'$, hay H' là hình chiếu của C trên OM'.

Kết luận : Tập hợp điểm H là cung H_1H_2.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho một điểm O cố định, một đường thẳng d cố định không đi qua O, một góc vuông xOy quay xung quanh điểm O. Các tia

Ox,Oy cắt d theo thứ tự tại A,B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) và đi qua O, lấy một điểm S cố định. Dựng $OE\perp SA, OF\perp SB$. Tìm quỹ tích các điểm E và F khi vuông xOy quay xung quanh điểm O.

Lời giải.



Dựng $OH\perp(SAB)$ thì H cố định. Do $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH\perp SE$, mặt khác $OE\perp SE$ $\Rightarrow SE\perp(OEH)\Rightarrow SE\perp EH$. Điểm E nhìn đoạn SH cố định trong mặt phẳng $mp(S,d)$ nên E thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

Tương tự F thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

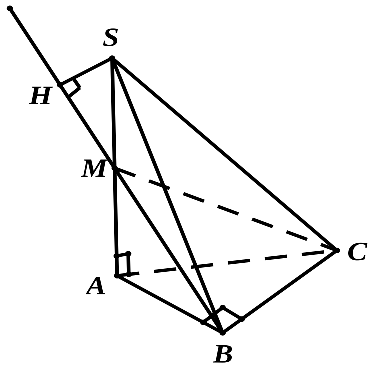
Phần đảo.(bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp các điểm E và F là đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$ bỏ đi hai điểm S và H.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên (MBC) khi M di động trên đoạn SA.

Lời giải.

Phần thuận.



Ta có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Dựng $SH\perp MB, H\in MB$, khi đó ta có

$\begin{cases} SH\subset(SAB) \\ BC\perp(SAB) \end{cases}\Rightarrow SH\perp BC\Rightarrow SH\perp(MBC)$ Vậy H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (MBC).

Trong mặt phẳng (SAB) điểm H nhì đoạn SB dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn (C) đường kính SB nằm trong (SAB).

Giới hạn.

Khi $M\equiv S\Rightarrow H\equiv S$.

Khi $M\equiv A\Rightarrow H\equiv A$.

Vậy M di động trên đoạn SA thì H di động trên cung nhỏ SA của đường tròn (C).

Phần đảo.

Gọi H' là một điểm bất kì trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi $M' = BH' \cap SA$. Ta có $\begin{cases} SH' \perp BM' \\ SH' \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH' \perp (M'BC)$ hay H' là hình chiếu của S trên (MBC).

Kết luận : Tập hợp các điểm H là cung nhỏ SA của đường tròn (C).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

26. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Chứng minh rằng :

a) $SO \perp (ABCD)$.

b) $AC \perp SD$.

28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$.

Chứng minh:

a) H là trực tâm của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác nhọn.

c) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$.

29. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

a) ΔACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Chứng minh $IK \perp (SCD)$ và tính IK.

31. Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA, DB, DC với mặt phẳng (ABC).

Chứng minh $(2 + \cot^2 \alpha)(2 + \cot^2 \beta)(2 + \cot^2 \gamma) \geq 64$.

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.Chứng minh :

a) $AC \perp (SHK)$

b) $CK \perp SD$.

33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK và BC đồng qui.

b) $SB \perp (CHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

34. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Chứng minh $AC \perp (BHK)$.

c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động.

d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất.

e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất.

35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Chứng minh rằng :

a) $SH \perp (ABCD)$.

b) $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$. Tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Gọi K, L là các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$

c) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB

a) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Xác định tiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện.

39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

40. Cho tam giác ABC tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α, β. Tính góc giữa đường cao CK với (P).

41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO \perp (ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a)Chứng minh $SO = AH$ và SA khi $HB = \frac{a}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với $(ABCD)$.

42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

b) Chứng minh $AB = a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

43. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tứ diện. Gọi A, B, C là ba góc tương ứng của tam giác ABC.

Đặt $\alpha = AOH, \beta = BOH, \gamma = COH$. Chứng minh: $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

44. Cho tứ diện $ABCD$ có $BDC = 90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh $CDA = 90^0$.

b) $6(DA^2 + DB^2 + DC^2) \geq (AB + BC + CA)^2$.

45. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α, β, γ lần lượt là góc gữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA, OB, OC.

Chứng minh rằng: $\cot\alpha \cot\beta \cot\gamma \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Tìm GTNN của $S = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$